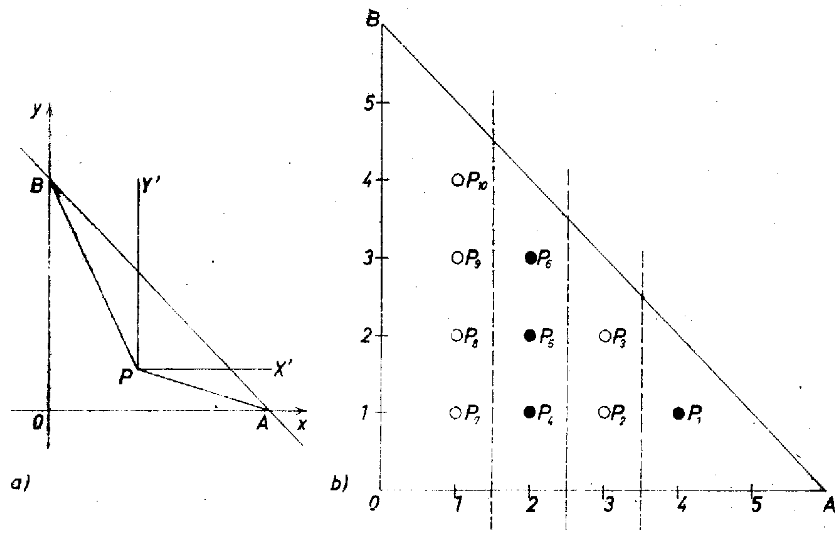
Legyen az OAB háromszög egy belső pontja P, és az ezen át az x, y tengely pozitív felével párhuzamos félegyenes PX', ill. PY' (1 a ábra).



Ekkor a látószög mint a PB, PA félegyenesek irányszögének különbsége

$$APB\sphericalangle = X'PB\sphericalangle - X'PA\sphericalangle = \pi/2 + Y'PB\sphericalangle + APX'\sphericalangle,$$

ennek φ középértékét kell kiszámítanunk háromszögünk $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ rács-pontjaira (1 b ábra):

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(Y'P_iB\sphericalangle + AP_iX'\sphericalangle) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{10}\sum_{i=1}^{10} AP_iX'\sphericalangle,$$

ugyanis alakzatunk (a háromszög és a benne levő rácspontok halmaza) szimmetrikus az $y = x$ egyenesre, ennek alapján a zárójel kétféle tagjából képezett összegek egyenlők.

A szögeket célszerű tangensük alapján mindjárt ívmértékben kiírni:[1]

i	tg $AP_iX'\sphericalangle = t_i$	arc tg t_i	Közép
1	$1/2 = 0,5$	$0,4636$	$0,4636$
2	$1/3 = 0,3333$	$0,3217$	
3	$2/3 = 0,6667$	$0,5880$	$0,4578$
4	$1/4 = 0,25$	$0,2450$	
5	$2/4 = 0,5$	$0,4636$	
6	$3/4 = 0,75$	$0,6435$	$0,4542$
7	$1/5 = 0,2$	$0,1974$	
8	$2/5 = 0,4$	$0,3805$	
9	$3/5 = 0,6$	$0,5404$	
10	$4/5 = 0,8$	$0,6747$	$0,4518$

A táblázat utolsó oszlopa az $i = 1, 3, 6, 10$ határokig bezárólag kapott ívmértékszámok középértékét tünteti fel. Közülük az utolsó a feladat eredeti kérdésére vonatkozik, az első három pedig a megfelelő eredmény $OA = 3, 4$, ill. 5 esetére. Eszerint (3 tizedesre kerekítve)

$$\varphi = (\varphi_6 =)\frac{\pi}{2} + 2\cdot 0,4518 = 2,474,$$
$$\varphi_3 = 2,498, \qquad \varphi_4 = 2,486, \qquad \varphi_5 = 2,479,$$

míg a közölt érték: $\pi - \log 2 = 3,1416 - 0,6931 = 2,4484\ldots$, ezt φ_6 alig többel, mint 1 %-kal haladja meg.

Megjegyzés. A P_1-hez; a P_2-höz és P_3-hoz; a P_4-hez, P_5-höz és P_6-hoz; valamint a P_7, P_8, P_9, P_{10} pontokhoz tartozó átlagok, külön-külön egy-egy (szokásos) közelítést adnak az

$$\int_0^1 \text{arc tg}\, x\, dx$$

[1]Az iskolai függvénytáblázat-gyűjtemény 8. sz. táblázata.

integrálra. Nem egészen szabályos felső közelítések ezek, hiszen az utolsó, az $x = 1$ osztásponthoz tartozó függvényérték nem szerepel az átlagban. Azt mondhatjuk, véletlen, hogy még így is felső közelítést kaptunk. Mindenesetre, ha a beosztást finomítjuk, a mondott integrál értékét egyre pontosabban kapjuk meg, tehát e közelítő értékek súlyozott átlaga is tart az integrál értékéhez. Ennek az integrálnak a fenti számítás alapján kapott felső közelítő értékeit és a trapéz-szabályból kapott alsó közelítő értékeit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

n	Felső közelítés	Alsó közelítés
2	$0,4636$	$0,4282$
3	$0,4548$	$0,4341$
4	$0,4507$	$0,4362$
5	$0,4482$	$0,4371$

Ha tudjuk, hogy az

$$F(x) = x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2} \log\,(1 + x^2)$$

függvény deriváltja épp arc tg x aminek az ellenőrzéséhez a tanult deriválási szabályokon kívül csak az iskolai táblázatban is megtalálható

$$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad (\log\, x)' = \frac{1}{x}$$

deriváltakat kell ismernünk), a fenti integrált pontos értékét is meghatározhatjuk a Newton-Leibniz-formula szerint:

$$\int_0^1 \text{arc tg } x\; dx = F(1) - F(0) = \text{arc tg } 1 - \frac{1}{2}\log\, 2 = \frac{\pi - \log 4}{4} = 0,4388.$$

A feladatban közölt átlagos látószöget a fenti megoldás szerint ebből úgy kapjuk, hogy a kétszereséhez hozzáadjuk a $\pi/2$ szöget, így valóban a $(\pi - \log\, 2)$ számot kapjuk.