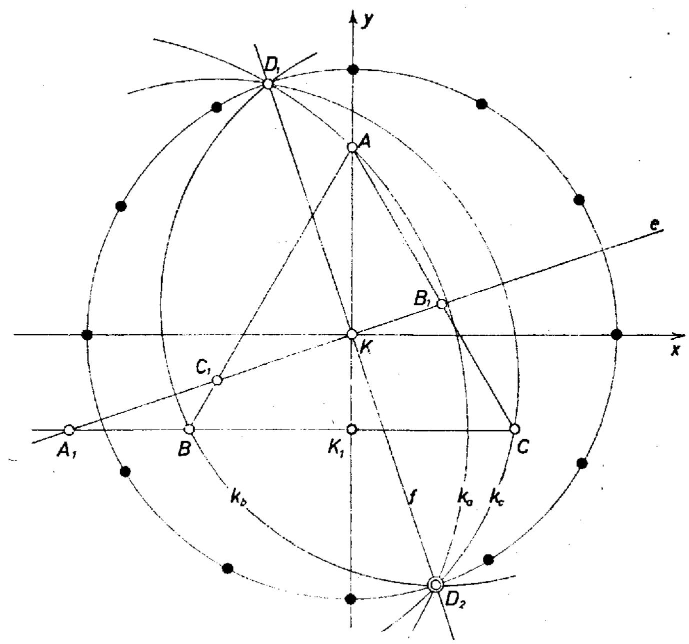
I. megoldás. 1. A feladatot a koordináta-geometria eljárásaival oldjuk meg. Vegyük origónak K-t, az x tengelyt BC-vel párhuzamosnak, irányítsuk az y tengelyt úgy, hogy A-n, a pozitív fele menjen át és válasszuk hosszúságegységnek a KA szakasz felét. Így a csúcsok: $A(0;\,2), B(-\sqrt{3};\,-1), C(\sqrt{3};\,-1)$. Legyen másrészt az e metsző egyenes egyenlete $y = mx$, ahol a föltevések szerint egyrészt m véges és $m \neq \pm 1/\sqrt{3}$, másrészt – mivel A_1, B_1, C_1 mindegyike létrejött, e nem párhuzamos, egyik oldallal sem –, ezért $m \neq 0$ és $m \neq \pm\sqrt{3}$ (ugyanis ezek háromszögünk oldalegyeneseinek iránytangensei, 1. ábra).



1. ábra

A BC, CA, AB oldalegyenes egyenlete rendre $y = -1$, $y = \mp\sqrt{3}x + 2$, és e-vel való metszéspontjaik koordinátái:

$$A_1\left(-\frac{1}{m},\,-1\right),\quad B_1\left(\frac{2}{m+\sqrt{3}},\,\frac{2m}{m+\sqrt{3}}\right),\quad C_1\left(\frac{2}{m-\sqrt{3}},\,\frac{2m}{m-\sqrt{3}}\right).$$

A B_1 pont körüli, B-n átmenő k_b kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{2}{m+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y - \frac{2m}{m+\sqrt{3}}\right)^2 = \left(-\sqrt{3} - \frac{2}{m+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-1 - \frac{2m}{m+\sqrt{3}}\right)^2$$

(a jobb oldalt abból kapjuk, hogy a bal oldal értéke mindig annyi, mint amennyi akkor adódik, ha x, y helyére B koordinátáit írjuk), rendezve

$$K_b(x,\,y) = x^2 + y^2 - \frac{4}{m+\sqrt{3}}(x+my) - 8 = 0. \tag{1}$$

Hasonlóan a C_1 körüli, C-n átmenő k_c, kör, végül az A_1 körüli, A-n átmenő kör egyenlete:

$$K_c(x,\,y) = x^2 + y^2 - \frac{4}{m-\sqrt{3}}(x+my) - 8 = 0, \tag{2}$$

$$K_a(x,\,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{m}(x+my) - 8 = 0. \tag{3}$$

2. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a k_b, k_c, körök D_1, D_2 metszéspontjain a k_a kör is átmegy. D_1 és D_2 koordinátái kielégítik a $K_b(x,\,y) = 0$ és $K_c(x,\,y) = 0$. egyenleteket, ezért bármely két, λ_b, λ_c állandó számot véve, a

$$\lambda_b \cdot K_b(x,\,y) + \lambda_c \cdot K_c(x,\,y) = (\lambda_b + \lambda_c)(x^2 + y^2 - 8) - \\ -4\left(\frac{\lambda_b}{m+\sqrt{3}} + \frac{\lambda_c}{m-\sqrt{3}}\right)(x+my) = 0 \tag{4}$$

egyenletet is. Mármost az állítást annak megmutatásával bizonyítjuk, hogy, ez az egyenlet λ_b, és λ_c alkalmas megválasztásával azonossá tehető k_a egyenletével. (4) azonos a (3)-mal, ha van olyan λ_b és λ_c, hogy bennük $(x^2 + y^2 - 8)$ és $(x + my)$ együtthatói rendre egyenlők:

$$\lambda_b + \lambda_c = 1,$$

$$-4\left(\frac{\lambda_b}{m+\sqrt{3}} + \frac{\lambda_c}{m-\sqrt{3}}\right) = \frac{-4m(\lambda_b + \lambda_c) + 4\sqrt{3}(\lambda_b + \lambda_c)}{m^2 - 3} = \frac{2}{m}.$$

Az utóbbiból az első fölhasználásával és kellő alakításával

$$\lambda_b - \lambda_c = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{2(m^2-3}{m} + 4m\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right),$$

tehát a kívánt értékek:

$$\lambda_b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(m - \frac{1}{m}\right), \qquad \lambda_c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(m - \frac{1}{m}\right).$$

[Pl. λ_b csak $m = +\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ és $m = \sqrt{3}$ mellett lehetne 0, ekkor $\lambda_c = 1$ és $K_c(x,\, y) \equiv K_a(x,\, y)$ $C_1 \equiv A_1 \equiv B$, ami kizárt eset.]

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk – anélkül, hogy D_1, D_2 koordinátáit meghatároztuk és k_a-ba helyettesítettük volna.

3. Most kiszámítjuk D_1, D_2 koordinátáit. Vonjuk ki (1)-ből (2)-t:

$$\left(\frac{4}{m-\sqrt{3}} - \frac{4}{m+\sqrt{3}}\right)(x+my) = \frac{8\sqrt{3}}{m^2-3}(x+my) = 0,$$

amiből (mivel $m \neq \pm\sqrt{3}$)

$$x + my = 0. \tag{5}$$

Innen $y = -x/m$-et (1)-be helyettesítve rövid számítással $D_1(x_1,\, y_1)$ és $D_2(x_2,\, y_2)$ abszcisszája, ordinátája rendre:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{8m^2}{m^2+1}}, \qquad y_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{8}{m^2+1}}. \tag{6}$$

Eszerint D_1 és D_2 mindig egymás tükörképei K-ra nézve. Ezért a koordinátákat x_D-vel, y_D-vel jelölve, m kiküszöbölésével

$$x_D^2 + y_D^2 = 8,$$

tehát a három kör közös pontja – ha létrejön – mindig rajta van az ABC háromszög K középpontja körüli, $2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,KA$ sugarú k_d körön.

4. Fordítva, meg kell vizsgálnunk, kiadódik-e k_d minden pontja D-ként. Eleve tudjuk azonban, hogy az m iránytényező kizárt 0, $\pm\sqrt{3}$, $\pm 1/\sqrt{3}$ értékei mellett (6) eredményeink nem érvényesek. Így pedig nincs olyan megengedett m, amely $x_D = 0$-ra vezet, tehát k_d-nek az ordinátatengelyen – a KA egyenesen – levő pontjai nem tartoznak hozzá a h mértani helyhez. Másrészt olyan m sincs (6) szerint, amely $y_D = 0$-ra vezetne, tehát k_d-nek a K-n át KA-ra merőlegesen (BC-vel párhuzamosan) húzott egyenesen levő pontjai sem tartoznak h-hoz. Az így kizárt 4 pontból újabb 4 – 4 kizárandó adódik K körüli, 120°-kal, illetve 240°-kal való elfordításukkal, hiszen ezek az elfordítások háromszögünket önmagába viszik át. Az újabb 8 pontra az ordináta és az abszcissza hányadosának abszolút értéke $\sqrt{3}$, illetve $1/\sqrt{3}$.

k_d-nek minden más D pontjára az $\dfrac{y_D}{x_D} = \mu$ hányados véges és a 0, $\pm 1/\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$ értékektől különböző szám és (5) mutatja, hogy ekkor $-1/\mu$ éppen az az m érték, mely a fentiek szerint D-t adja a 3 kör közös pontjaiként (és D-nek az origóra vonatkozó tükörképét, amelyre a hányados értéke ugyancsak μ).

Mindezek szerint a közös pontok mértani helye a k_d kör, a mondott 12 pont kihagyásával. (E pontok egy szabályos 12-szög csúcsai.)

Bacsó Gábor, Pallagi Dezső

Megjegyzések. 1. A fenti (5) – mint elsőfokú egyenlet – a k_b, k_c, körök f közös húregyenesének, *hatványvonal*ának[1] egyenlete. Ugyanez adódik (1) és (3) különbségéből is, tehát f a k_b, k_a körpárnak is hatványvonala. A bizonyítást ezek alapján így is befejezhetjük: f csak 2 pontban metszi k_b-t és azokon áthalad k_c is, k_a is.

2. Eleve a pont körre vonatkozó hatványának fogalmát használja fel a következő, a koordinátageometriainál jóval egyszerűbb megoldás.

II. megoldás. Nyilvánvaló, hogy a keresett mértani hely örökli az ABC háromszög tengelyes és forgási szimmetriáit. Példaként véve két egymásba így át nem vihető e egyenest, azt sejtjük, hogy a keresett mértani hely egy K körüli kör (ill. a kizárt helyzetek miatt ennek része); ezt bizonyítjuk.

Legyen a háromszög magasságának hossza m, és messe AK a BC-t K_1-ben. K-nak k_a-ra vonatkozó *hatványa*[1] a KA_1K_1 és AA_1K_1 derékszögű háromszögek alapján

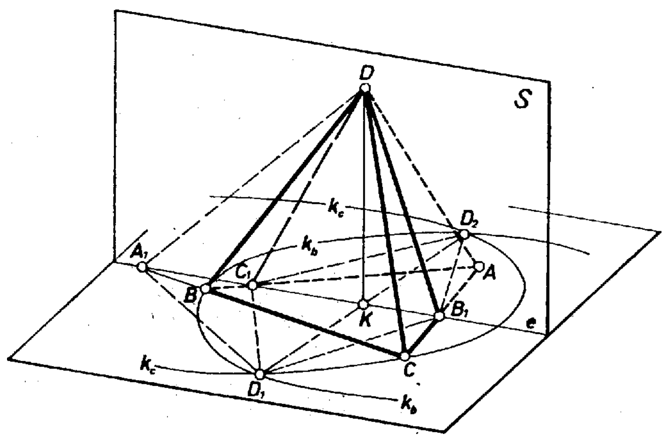
$$KA_1^2 - AA_1^2 = (KK_1^2 + K_1A_1^2) - (AK_1^2 - K_1A_1^2) = \frac{m^2}{9} - m^2 = -\frac{8}{9}m^2,$$

[1] Lásd pl. *Tolnai Jenő:* Érdekes matematikai gyakorló feladatok, II. rész. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. 22. old.
1

állandó, független e helyzetétől, tehát ugyanennyi K-nak k_b-re, k_c,-re vonatkozó hatványa is. Eszerint a K-ban e-re állított merőlegest mindhárom kör ugyanabban a két pontban metszi (a hatvány negatív értéke miatt K mindhárom körben benne van). És ha e a K körül forgatva minden megengedett helyzetén átfut, a metszéspont-pár a K körül kört ír le, sugarának négyzete egyenlő a hatvány abszolút értékével:

$$KD_1 \cdot KD_2 = KD_1^2 = \frac{8}{9}m^2.$$

III. megoldás. A feladatot térgeometriai értelmezéssel oldjuk meg. Az ABC szabályos háromszöget egy $ABCD$ szabályos tetraéder alaplapjának vesszük – ekkor K a D csúcs merőleges vetülete az alapon –, az alakzatunkat származtató e egyenest pedig egy a DK magasságvonalon átmenő S sík és az alapsík metszésvonalának tekintjük. Ekkor S a tetraéder DAB, DBC, DCA lapsíkját rendre a DC_1, DA_1, DB_1 egyenesben metszi, és ha B_1, C_1 az alapháromszög kerületén vannak, akkor a DB_1C_1 háromszög a tetraéder és S metszésidoma (2. ábra).



2. ábra

Azt fogjuk belátni – a fenti jelöléseket tovább használva –, hogy a k_b, k_c, körök D_1, D_2 metszéspontjai azonosak a D csúcsnak azokkal az új helyzeteivel, ahová jut, ha a metszésidomot a B_1C_1 egyenes mint tengely körül az egyik vagy a másik irányban belefordítjuk az alapsíkba.

Valóban, a DAC lapot AC körül az alaplapra ráfordítva D a B-be jut. S mivel eközben B_1 a helyén marad, a B_1B sugár egyenlő a metszetidom B_1D oldalával, és szerkesztésünk szerint $D_1B_1 = D_2B_1 = BB_1 = DB_1$.

A meggondolást megismételve a DAB lappal, kapjuk, hogy $D_1C_1 = D_2C_1 = CC_1 = DC_1$, ezek alapján a $D_1B_1C_1$, a $D_2B_1C_1$ és a DB_1C_1 háromszögek egybevágók, ennélfogva mint e háromszögek megfelelő szakaszaira:

$D_1K = D_2K = DK$, állandó.

Azt kaptuk, hogy a k_b, k_c körök metszéspontjai a metsző egyenes (és az S sík) minden megengedett helyzetében azon a k_d körön adódnak, amelynek középpontja K és sugara a tetraéder magassága. Mivel pedig KD és vele együtt KD_1, KD_2 is merőleges B_1C_1-re, azt is kaptuk, hogy k_b, k_c köreink D_1D_2 közös húregyenese mindig átmegy K-n.

A k_a kör amiatt halad át D_1-en és D_2-n, mert D-t BC körül az alapsíkba fordítva, A-ba jut, ezért $A_1A = A_1D$, másrészt A_1 is a B_1C_1 egyenes pontja, tehát a metszetidom lefordításával $A_1D = A_1A$ hossza az A_1D_1, A_1D_2 szakaszokban valódi nagyságában látszik. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Már csak annak a vizsgálata van hátra, hogy a k_d kör mely pontjai tartoznak hozzá a h mértani helyhez. Láttuk, hogy a D_1D_2 szakasz k_d-nek S-re, egyszersmind e-re merőleges átmérője: e-nek minden olyan helyzete figyelembe veendő, mely különböző a KA, KB, KC egyenestől is a rájuk K-ban állított merőlegestől, tehát a kizárt helyzetek száma 6. Így ki van zárva h-ból k_d-nek az a $6 \cdot 2 = 12$ pontja, melyek e 6 kizárt egyenesre merőleges átmérő végpontjai. Fordítva, k_d-nek minden más D_1 pontjához úgy kapjuk e-nek a D_1-et előállító helyzetét, hogy merőlegest állítunk K-ban KD_1-re. Más kizárt pont tehát nincs.