I. megoldás. Az állítást k-ra vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Ha $k=1$, akkor (1) két oldala azonos, az állítás igaz. Feltéve, hogy (1) igaz valamely k kitevőre, ezt felhasználva

$$\left[1-(1-x)^n\right]^{k+1}=\left[1-(1-x)^n\right]\cdot\left[1-(1-x)^n\right]^k \geqq \left[1-(1-x)^n\right]\cdot\left[1-\left(1-x^k\right)^n\right],$$

ahhoz tehát, hogy az állítás $(k+1)$-re is teljesül, elég igazolni a következőket:

$$\left[1-(1-x)^n\right]\cdot\left[1-\left(1-x^k\right)^n\right]\geqq 1-\left(1-x^{k+1}\right)^n,$$

illetve a bal oldali nagy zárójeleket felbontva, hogy

$$\left(1-x^{k+1}\right)^n-(1-x)^n \geqq \left(1-x^k\right)^n-\left[(1-x)\left(1-x^k\right)\right]^n.$$

Jelöljük itt az egymás utáni n-edik hatványok alapjait röviden rendre a, b, c, d betűvel. Így könnyebb látni, hogy

(2) $$a\geqq c\geqq 0,\qquad b\geqq d\geqq 0 \text{ és}$$

(3) $$a-b=c-d\geqq 0$$

és a bizonyítandó állítás így alakul

(4) $$a^n-b^n=c^n-d^n.$$

A (2)-ből $m=1,2,\ldots,n$ esetén

$$a^{n-m}b^{m-1}\geqq c^{n-m}d^{m-1},$$

ezt a mondott m értékekre összeadva, majd a kapott $(n-1)$-edfokú polinomok közül a bal oldalit $(a-b)$-vel, a jobb oldalit $(c-d)$-vel szorozva, egy ismert azonosság és (3) figyelembevételével éppen (4) adódik. Ezzel az állítást igazoltuk.

Könnyen látható, hogy (1)-ben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha legalább egy fennáll a következő egyenlőségek közül:

$$n=1,\quad k=1,\quad x=0,\quad x=1.$$

Bacsó Gábor (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A feladat állítását valószínűségszámítási értelmezéssel igazoljuk. Fessük egy n sorból és k oszlopból álló sakktábla mezőit egymástól függetlenül feketére vagy fehérre, és jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a táblának minden egyes sorában adódott legalább egy fekete mező, B-vel pedig azt, hogy minden oszlopban adódott legalább egy fehér mező. Az A és B események közül legalább az egyik biztosan bekövetkezik a tábla minden teljes kifestésében, különben ugyanis volna olyan sor, amelyben minden mező fehér, és volna olyan oszlop is, melyben minden mező fekete, ami pedig együtt lehetetlen. Így a szokásos jelölésekkel

(5) $$1=P(A+B)\leqq P(A)+P(B).$$

Ha most bármely mező fehérre festésének valószínűsége x, akkor

(6) $$P(A)=\left(1-x^k\right)^n,$$

ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy kiszemelt sorban mind a k mezőt fehérre festettük: x^k; ezért annak a valószínűsége, hagy ebben a sorban van legalább egy fekete mező: $\left(1-x^k\right)$; ebből, egymás után mind az n sort véve, adódik (6). – Hasonlóan látható be, hogy

(7) $$P(B)=\left[1-(1-x)^n\right]^k,$$

és (6)-ot és (7)-et (5)-be behelyettesítve, átrendezéssel éppen az állítást kapjuk.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o, t.)

Megjegyzés. Ezzel a meggondolással a következő állítás is igazolható:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}x_{i,j}\right)\geqq 1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\prod_{i=1}^{n}x_{i,j}\right),$$

ahol $0\leqq x_{i,j}\leqq 1$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,k)$.