I. megoldás. Irracionálisnak a nem racionális (valós) számokat nevezzük, vagyis azokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Minden racionális számot tizedes tört alakra átírva, vagy véges tizedes törtet kapunk vagy szakaszos tizedes törtet, azaz olyat, amelynek számjegyei sorában valahonnan kezdve egy szakasz: véges számú számjegy egymásutánja periodikusan ismétlődik. A szakasz számjegyeinek p számát a szakasz (periódus) hosszának nevezzük. Ezek szerint A irracionális voltának bizonyításához elég belátni, hogy semmiféle p természetes szám nem lehet a periódusának hossza.

Felhasználjuk, hogy a 3^k hatványok utolsó számjegye az 1, 3, 9 és 7 jegyek valamelyike, utolsó előtti számjegye pedig páros.[1]

Bebizonyítjuk továbbá, hogy bármely j természetes számhoz van olyan k kitevő, hogy a 3^k hatvány jegyeinek száma j. Valóban, ha egy 3^r hatvány s jegyű, akkor a következő három intervallum valamelyikébe esik:

$$\left(10^{s-1},\ \frac{10^s}{9}\right),\qquad \left(\frac{10^s}{9},\ \frac{10^s}{3}\right),\qquad \left(\frac{10^s}{3},\ 10^s\right),$$

és ennek megfelelően rendre a 3^{r+3}, 3^{r+2}, 3^{r+1} hatvány számjegyeinek száma pontosan $(s+1)$; tehát minden egyes 3^k hatványhoz hozzárendelve számjegyeinek számát, ezen új sorozatból egyetlen természetes szám sem hiányzik.

Tegyük fel mármost, hogy az (1) szám racionális – ekkor képzésénél fogva nem lehet véges tizedes tört –, tizedes tört alakjában a periódus hossza p, és az első periódus előtti utolsó számjegy (ami később nem ismétlődik) a 3^N hatványból származik. $p \geqq 2$, hiszen láttuk, hogy $k \geqq 3$ esetén a 3^k hatvány jegyei közt van páratlan is, páros is. Vegyük p-nek egy az N-nél nagyobb mp többszörösét és hozzá egy olyan $k(>2)$ kitevőt, amelyre 3^k számjegyeinek száma $mp+1$. ($mp+1$ nem többszöröse p-nek.) Leírva 3^{k-1} utolsó jegyét, ami páratlan, a periodikusság folytán, tőle akárhányszor p-vel tovább lépve, ugyanezt a jegyet kellene kapnunk. Ámde mp-vel tovább lépve az $(mp+1)$ jegyű 3^k-nak utolsó előtti jegyét találjuk, ami páros. Ellentmondásra jutottunk, föltevésünk hibás, A nem szakaszos végtelen tizedes tört, tehát irracionális.

Megjegyzés. Az idézett gyakorlat kiegészítő kérdésére azt találtuk, hogy az állítás érvényes a 3-as alapszám helyén minden olyan egész számra, melynek utolsó jegye 0, 1, 3, 5, 7 vagy 9, és utolsó előtti jegye páros. Az 5, 7, 9 alapszámokra fenti bizonyításunk is közvetlenül átvihető.

II. megoldás. A 3^k hatványok utolsó számjegye periodikusan 1, 3, 9, 7, ezek A-ban végtelen sokszor lépnek föl, tehát ha van A-nak periódusa, abban is föllép mindegyikük. Eszerint azt a föltevést, hogy A periódusának hossza p, megcáfolhatjuk annak megmutatásával, hogy A-ban végtelen sokszor található egymás után p db 0 jegy.

Részben megismételjük a Gy. 1330. gyakorlat II. megoldásának[2] gondolatmenetét, $n=3$ helyén $(p+1)$-et véve. Tekintsük a 3^k hatványok $(p+1)$ jegyű végződését. A különböző végződések száma véges (nem több, mint 10^{p+1}), ezért van olyan $l>k$, hogy a 3^l és 3^k hatványok $(p+1)$-jegyű végződése egyezik. Így különbségük: $3^l-3^k=3^k\left(3^{l-k}-1\right)$ osztható 10^{p+1}-nel (ami $2^{p+1}\cdot 5^{p+1}$. Mivel 3^k relatív prím 10^{p+1}-hez, azért a $3^{l-k}-1$ tényező osztható 10^{p+1}-nel, tehát $3^{l-k}=10^{p+1}\cdot a+1$ alakú. Ebben a hatványban pedig – és minden $3^{m(l-k)}$-ban is – az a szám utolsó jegye és a szám végén álló 1-es számjegy között p db zérus áll. Ezt akartuk bizonyítani.

Fulmer László (Székesfehérvár,Teleki Blanka Gimn., III o. t.)

[1] Gy. 1211. gyakorlat, K.M.L. 39 (1969) 18–19.
[2] K.M.L. 44 (1972) 16–17.