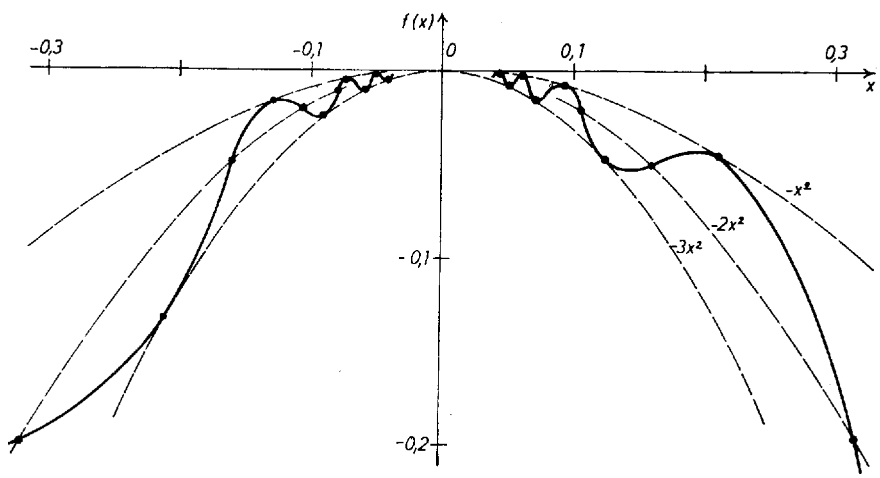
Legyen

$$f(x)=\begin{cases}-x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}+2\right), & \text{ha} \quad x\neq 0\\ 0, \quad \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

Ekkor minden $a\neq 0$ mellett $f'(a)=-2a\left(\sin\dfrac{1}{a}+2\right)+\cos\dfrac{1}{a}$, továbbá $f'(0)=0$, mert

$$f'(0)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to\infty}\left\{-x\left(\sin\frac{1}{x}+2\right)\right\}=0.$$

Az $f(x)$ függvénynek az $x=0$ helyen maximuma van, mivel $x\neq 0$ esetén $\sin\dfrac{1}{x}+2>0$ és $-x^2<0$ miatt $-x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}+2\right)<0$, és $f(0)=0$.



Megmutatjuk, hogy $f'(x)$ nem vált előjelet a 0-ban.

Az $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ sorozatra: $x_n\to 0$ és

$$f'(x_n)=-\frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi+2)+\cos 2n\pi=1-\frac{2}{n\pi}>0,$$

$$\text{az } y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi} \text{ sorozatra pedig } y_n\to 0 \text{ és}$$

$$f'(y)=-\frac{2}{(2n+1)\pi}\big(\sin(2n+1)\pi+2\big)+\cos(2n+1)\pi=-1-\frac{4}{(2n+1)\pi}<0.$$

Azt kaptuk, hogy a 0 bármely kis környezetében a derivált lehet negatív is, pozitív is. Az állítást ezzel beláttuk.

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn.)

Megjegyzés. Természetesen más függvényt is találhatunk, amely hasonló tulajdonsággal bír.