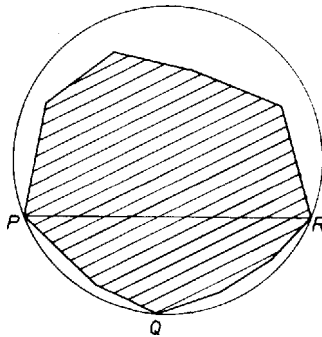


Nevezzük a sokszög három csúcsát lefedő hármasknak, ha az általuk meghatározott kör lefedi a sokszöget. Egy fedő hármask *mérete* legyen az a legkisebb természetes  $k$  szám, amelyhez megadható a sokszög  $k$  szomszédos csúcsa úgy, hogy azok között a mondott három csúcs is szerepel. Azt fogjuk megmutatni, hogy a minimális méretű fedő hármask mérete 3, azaz a benne szereplő csúcsok szomszédosak.

Ehhez először be kell látnunk, hogy egyáltalán van fedő hármask. Ennél többet is állíthatunk: a sokszög tetszőleges két szomszédos csúcsa kiegészíthető fedő hármassá. Nézzük meg ugyanis, mekkora szög alatt látszik a két szomszédos csúcs által meghatározott szakasz a többi csúcsból – és vegyük e látószögek minimumát (vagy ha ilyen több volna, azok egyikét). A minimális látószöget adó csúcson és az eredeti két csúcson átmenő kör lefedi a sokszöget, hiszen a választott oldal minket érdeklő oldalán ez a körlap a mértani helye mindazon pontoknak, amelyekből az illető oldal legalább  $\omega$  látószög alatt látszik.

Tehát a fedő hármask halmaza nem üres. Mivel a halmaznak csak véges sok eleme van, van a halmaz elemei között minimális méretű. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy e minimális méret nagyobb 3-nál, mondjuk  $k$ . Jelöljük a csúcsokat  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ -rel, feltevésünk szerint  $P$ -től  $Q$ -n át  $R$  felé haladva rajtuk kívül még  $(k - 3)$  pontot érintünk, és tegyük fel még azt is, hogy mindjárt  $P$  és  $Q$  között is van még csúcs.



Nézzük meg, mekkora szög alatt látszik ezekből a  $PQ$  szakasz, és válasszuk azt a csúcsot, amelyre ez a látószög maximális. Jelöljük ezt a csúcsot  $S$ -sel, akkor  $P$ ,  $S$ ,  $Q$  fedő hármask, és mérete  $k$ -nál kisebb. Ez utóbbi nyilvánvaló, az előbbi pedig következik abból, hogy e maximális látószög sem lehet nagyobb, mint az eredeti kör  $R$ -et nem tartalmazó  $PQ$  ívéhez tartozó kerületi szög. Emiatt a  $PQ$  egyenes  $R$ -et tartalmazó oldalán az eredeti kör teljes egészében az új körben van benne,  $PQ$   $R$ -et nem tartalmazó oldalán pedig,  $S$  választása miatt van minden csúcs benne az új körben.  $PQR$ , tehát nem volt minimális, ellentmondásra jutottunk. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.