(1) $$|x_0 - x_1| \leq n \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| .$$

I. megoldás. Legyenek az $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ polinom gyökei valamilyen sorrendben: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, valamennyien valósak (nem lényeges, hogy vannak-e köztük egyenlők). Ha valamely i-re ($1 \leqq i \leqq n$) $x_0 = x_i$, tehát $f(x_0) = 0$, és $f'(x_i) \neq 0$, akkor (1)-ben x_1 szerepére vehető maga x_i így mindkét oldal értéke 0, az állítás igaz. A továbbiakban már csak az $x_0 \neq x_i$ ($i = 1, 2, \ldots n$), $f'(x_0) \neq 0$ föltételeknek eleget tevő helyeket tekintjük, s mivel így $f(x_0) \neq 0$, az állítás ekvivalens az (1) reciprokával: ... x_0-hoz van olyan i index, hogy

(2) $$\frac{1}{|x_0 - x_i|} = \frac{1}{n} \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| .$$

Ezt fogjuk bizonyítani.

Ismeretes, hogy $f(x)$ osztható mindegyik $(x - x_i)$ gyöktényezőjével, és írható ezek szorzataként:

(3) $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

(Más tényező nincs, mert $f(x)$-ben x^n együtthatóját 1-nek vettük az n-ed fokúság biztosítására; az így bebizonyított állítás $a_0 \neq 0$ mellett $a_0 f(x)$-re is érvényes.)

Ebből az alakból könnyű képezni $f'(x)$-et, miután a két tényezős szorzat $(uv)' = u'v + v'u$ deriválási szabályát – amely $v = 1$-et véve már egy tényezős „szorzatra" is érvényes – teljes indukcióval $n > 2$-re általánosítottuk. Ezt az olvasóra hagyva, csak az eredményt mondjuk ki: n tényezős szorzat deriváltja n tagból áll, mindegyik tag n tényezős szorzat, rendre egy tényezőt deriválunk és ezt szorozzuk a többi – változatlanul hagyott – tényező szorzatával. (Ez természetesen csak olyan helyen érvényes, ahol mindegyik tényező deriválható; feladatunkban mindenütt.) (3)-ból pl. $(x - x_1)' = 1$ alapján $f'(x)$ első tagja:
$$(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

amit célszerű egyszerűbben
$$\frac{f(x)}{x - x_1}$$

alakban írni, hiszen ahol $f'(x)$-et használni fogjuk, x_0-ban, ott a nevező nem 0, és ez áll $i = 2, \ldots, n$ mellett $(x - x_i)'$ esetére is. Eszerint ha $x \neq x_i$ úgy
$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x - x_n},$$

ezért, mindjárt (2) jobb oldala céljára alakítva

(4) $$\left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| = \left| \frac{1}{x_0 - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_0 - x_n} \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{|x_0 - x_1|} + \frac{1}{x_0 - x_2} + \ldots + \frac{1}{|x_0 - x_n|}.$$

A jobb oldalt növeljük, ha mindegyik tagja helyére a legnagyobbik tagját írjuk – vagy ha mind az n tag egyenlő, akkor változatlan marad. Legyen az a tag, vagy a legnagyobb tagok egyike $\frac{1}{|x_0 - x_k|}$ ekkor (4) így alakul:
$$\left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \leqq n \frac{1}{x_0 - x_k}.$$

Eszerint x_k megfelel a (2)-ben említett gyök szerepére, az állítást bebizonyítottuk.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha minden i-re $|x_0 - x_i|$ értéke egyenlő. Ez kétféleképpen állhat elő:

α) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, n-szeres gyök, $f(x) = (x - x_1)^n$, és x_0 bármi, kivéve x_1-et;

β) alkalmas indexezés mellett $x_1 = x_2 = \ldots = x_r \neq x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n$ ($1 \leqq r \leqq n - 1$) esetében kizárólag az $x_0 = (x_1 + x_n)/2$ helyen.

Eredményünket konkrétabban is kimondhatjuk. A kiválasztási feltétel szerint $|x_0 - x_k|$ a legkisebb az $|x_0 - x_i|$ értékek közül ($i = 1, 2, \ldots, n$), tehát az állításban mindenesetre megfelel $f(x)$-nek az x_0-hoz legközelebbi zérushelye. Ebben a megfogalmazásban az előre elintézett esetleges $x_0 = x_i$ eset is benne van. (Természetesen esetenként megfelelhet más gyök is.)

Kószó Károly (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)
Kollár János (Budapest, Piarista Gimn.)

Megjegyzések. 1. Az állításnak szemléletes jelentést tulajdoníthatunk a polinomot ábrázoló görbe $\big(x_0,\, f(x_0)\big)$ pontbeli érintőjével kapcsolatban. Mivel $f'(x_0) \neq 0$, ez az érintő metszi az x-tengelyt, éspedig az x_0 ponttól $f(x_0) : f'(x_0)$ távolságban (előtte vagy utána). Azt bizonyítottuk be, hogy ezt a távolságot n-szer fölmérve x_0-tól mindkét irányban, a két végpont közti intervallumban van gyöke a polinomnak hacsak tudjuk, hogy polinomunknak minden gyöke valós. Ennek speciális esete az $f(x) = x^2$, melyre $x_1 = x_2 = 0$, ennek $x \neq 0$ esetén – mint ismeretes – az $(x,\, x^2)$ pontbeli érintőjét megadja a pontot az $\left(\dfrac{x}{2},\, 0\right)$ ponttal összekötő egyenes.

Császár Gyula (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

2. A gyökök valós voltára vonatkozó föltevést csak burkoltan, (4)-ben és utána használtuk fel. így nem merül fel az a probléma, hogy mit értünk végzett lépéseinken akkor, ha nem minden gyöke valós az $f(x)$-nek, esetleg egy sem valós.

II. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$ esetén azt kell belátnunk, hogy az $f_2(x) = ax^2+bx+c$ polinomnak, amelyre $a \neq 0$ és $b^2 - 4ac \geqq 0$, $x_0 \neq -\dfrac{b}{2a}$ esetén x_1 és x_2 gyökei közül valamelyikre – jelöljük ezt x_2-vel – teljesül

$$|x_0 - x_2| = 2\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|. \tag{5}$$

Ugyanis $f_2'(x) = 0$ csak a kizárt érték mellett áll.) Hozzátesszük ehhez, hogy az állítást itt is és tetszőleges n esetén is az x_0-hoz legközelebbi gyökre bizonyítjuk; tehát speciálisan $n = 2$ mellett a fentiek alapján $|x_0 - x_2| \leqq |x_0 - x_1|$.

Ha $x_0 = x_2$, azaz $f_2(x_0) = f_2(x_2) = 0$, akkor (5) nyilvánvalóan teljesül az egyenlőség jelével. Ha $x_0 \neq x_2$, akkor $x_0 \neq x_1$ is fennáll és

$$f_2(x) = a(x - x_2)(x - x_1),$$
$$f_2'(x) = a(x - x_2) + a(x - x_1),$$

és (5) teljesül, mert a jobb oldal reciprokára

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f_2'(x_0)}{f_2(x_0)}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\frac{|a(x_0 - x_2)| + |a(x_0 - x_1)|}{|f_2(x_0)|} \leqq \frac{|a(x_0 - x_l)|}{|x_0 - x_2| \cdot |a(x_0 - x_1)|} = \frac{1}{|x_0 - x_2|},$$

és innen, véve az első és az utolsó kifejezés reciprokát, (5)-öt kapjuk.

Föltesszük ezután, hogy az állítás helyes minden $(n-1)$-ed fokú polinomra (és természetesen a korlátozásnak megfelelően választott x_0-ra). A vizsgálandó $f_n(x)$ valódi n-ed fokú polinomot x_0 megadása és a hozzá legközelebbi gyök megkeresése után – jelöljük ezt a gyököt x_n-nel – így alakítjuk:

$$f_n(x) = (x - x_n) \cdot f_{n-1}(x), \tag{6}$$

ahol $f_{n-1}(x)$ az az $(n-1)$-edfokú polinom, melynek gyökei az $f_n(x)$-nek $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1}$, gyökei, és benne x^{n-1} együtthatója egyenlő $f_n(x)$-ben x^n együtthatójával, tehát $f_{n-1}(x)$ valódi $(n-1)$-ed fokú polinom. Ekkor

$$f_n'(x) = (x - x_n) \cdot f_{n-1}'(x) + f_{n-1}(x),$$
$$f_n(x_0) = (x_0 - x_n) \cdot f_{n-1}(x_0), \tag{7}$$
$$f_n',(x_0) = (x_0 - x_n) \cdot f_{n-1}'(x_0) + f_{n-1}(x_0). \tag{8}$$

α) Ha $f_{n-1}'(x_0) = 0$, akkor (8) alapján $f_{n-1}(x_0) \neq 0$, és (7) alapján (1) jobb oldala így alakul:

$$n\left|\frac{f_n(x_0)}{f_n'(x_0}\right| = n|x_0 - x_n| > |x_0 - x_n|,$$

tehát (1) teljesül.

β) Ha $f_{n-1}'(x_0) \neq 0$, és x_0 gyöke $f_n(x)$-nek, azaz $x_0 = x_n$, akkor (1) az egyenlőség jelével érvényes. Ha pedig x_0 nem gyöke $f_n(x)$-nek, tehát $f_{n-1}(x)$-nek sem, akkor (8)-ból és (6)-ból (1) jobb oldala céljára

$$\frac{f_n'(x_0)}{f_n(x_0)} = \frac{f_{n-1}'(x_0)}{f_{n-1}(x_0)} + \frac{1}{x_0 - x_n},$$

ezért

$$\left|\frac{f_n'(x_0)}{f_n(x_0)}\right| \leqq \left|\frac{f_{n-1}'(x_0}{f_{n-1}(x_0)}\right| + \left|\frac{1}{x_0 - x_n}\right|. \tag{9}$$

És mivel az indukciós feltevés alapján van olyan gyöke $f_{n-1}(x)$-nek – mondjuk x_{n-1} –, amelyre

$$\left|\frac{f'_{n-1}(x_0)}{f_{n-1}(x_0)}\right| \leqq (n-1)\frac{1}{|x_0-x_{n-1}|} \leqq \frac{n-1}{x_0-x_n}.$$

hiszen $|x_0-x_{n-1}| \geqq |x_0-x_n|$. Eszerint (9)-ből

$$\left|\frac{f'_n(x_0)}{f_n(x_0)}\right| \leqq \frac{n}{|x_0-x_n|},$$

ami ekvivalens (1)-gyel. Minden lehetséges esetet áttekintettünk, a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Ebből a bizonyításból könnyű látni, hogy $n=2$ esetén az x_0-tól távolabbi x_1 gyökre – természetesen ha $x_1 \neq x_2$ – az állítás nem teljesül; ekkor $|x_0-x_1| = |x_0-x_2|$ sem teljesülhet, mert belőle $x_0 = (x_1+x_2)/2$ következnék, ott pedig $f'_2(x_0) = 0$ lenne.