A polinom középső három tagjának $Q(x)$ összegére alsó becslést adunk. Avégett, hogy a föltevést felhasználhassuk, $|x|$, $|x^2|$ és $|x^3|$ mindegyike helyett vagy $|x|$-et, vagy $|x^3|$-et fogunk írni, s ezért szétválasztjuk $1 > |x| > |x|^2 > |x|^3$ és az $1 \leqq |x| \leqq |x|^2 \leqq |x|^3$ esetet.

Az abszolút értékekre ismert nagyságviszony-tételek alapján

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx \geqq -|ax^3 + bx^2 + cx| \geqq -\{|ax^3| + |bx^2| + |cx|\} =$$
$$= -\{|a| \cdot |x|^3 + |b| \cdot |x|^2 + |c| \cdot |x|\},$$

ebből a föltevés vázolt alkalmazásával

$$\text{ha } |x| < 1, \text{ akkor } Q(x) \geqq -(|a| + |b| + |c|) \cdot |x| \geqq -\sqrt{2} \cdot |x|,$$
$$\text{ha } |x| \geqq 1, \text{ akkor } Q|x| \geqq -\sqrt{2} \cdot |x|^3,$$

tehát a két esetben rendre

$$P(x) \geqq x^4 - \sqrt{2} \cdot |x| + 1, \text{ ill. } P(x) \geqq x^4 - \sqrt{2} \cdot |x|^3 + 1. \tag{1}$$

Ezek alapján elég azt belátnunk, hogy

$$x^4 - \sqrt{2}x + 1 > 0, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x < 1, \tag{2}$$
$$x^4 - \sqrt{2}x^3 + 1 > 0, \quad \text{ha} \quad x \geqq 1, \tag{3}$$

hiszen ezekkel minden negatív $x$-re is teljesül (1) megfelelő egyenlőtlensége; végső soron pedig mert így már belátjuk, hogy $P(x)$ értéke minden valós $x$-re pozitív, tehát az állítás igaz.

Állításunk (2) része $x = 0$ esetén igaz. A $(+1)$-es tag marad a döntő mindaddig, amíg $0 < x \leqq 1/\sqrt{2}$, hiszen így (2) második tagja nem kisebb, mint $(-1)$, tehát a bal oldal nem kisebb, mint $x^4$. Ha pedig $1/\sqrt{2} < x < 1$, akkor

$$x^4 = x^2 \cdot x^2 > \frac{1}{2}x^2,$$

és ezzel a csökkentéssel a bal oldal

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - 1\right)^2$$

alakra hozható, ami pozitív. Ezzel (2)-t bebizonyítottuk.

Most már a (3) bizonyítására elég megjegyezni, hogy $x = 1$ esetében teljesül állításunk, $x > 1$ esetében pedig visszavezethető a (2)-re:

$$x^4 - \sqrt{2}x^3 + 1 = x^4\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4 - \sqrt{2}\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) = x^4(z^4 - \sqrt{2}z + 1),$$

ahol $z = \dfrac{1}{x}$, és így $0 < z < 1$ és az utolsó alak mindkét tényezője pozitív. – Ezzel bizonyításunkat befejeztük.