A kérdéses szám (vagy számok) a 2^1, 2^2, 2^3, $\ldots$, 2^{100} hatványok mindegyikével osztható, ezért utolsó jegye csak 2-es lehet a megengedett 1-es és 2-es közül; tízes értékű jegye csak 1-es, hiszen 22 nem osztható már 4-gyel sem; százas értékű jegye is csak 1-es, mert 212 már 8-cal sem osztható. További egy–két próba mutatja, hogy 1112 a 16-tal osztva maradékot ad – ami csak a 16 fele, 8 lehet, mert a 8 még egész számszor van meg benne, másrészt 1000 is 8-at ad, hiszen még $1000 : 8 = 5^3$ egész (páratlan), ennélfogva $1112+1000 = 2112$ osztható 16-tal, és hasonlóan 22 112 osztható 2^5-nel, 122 112 osztható 2^6-nal. A

$$\frac{2}{2^2} = 1, \quad \frac{12}{2^2} = 3, \quad \frac{112}{2^3} = 14, \quad \frac{2112}{2^4} = 132, \quad \frac{22\,112}{2^5} = 691$$

hányadosok sorozatából azt sejtjük, hogy páratlan hányadost kapva az eddig megtalált számvégződés elé 1-es lép, páros hányados után pedig 2-es a következő új számjegy. Ezt fogjuk bizonyítani: ha az 1-esekkel és 2-esekkel írt n-jegyű A szám osztható 2^n-nel és az $A : 2^n = q$ hányados páratlan, akkor 2^{n+1}-nel az $(1 \cdot 10^n + A)$ szám osztható, ha pedig q páros, akkor $(2 \cdot 10^n + A)$.

Valóban, az első esetben

$$\frac{1 \cdot 10^n + A}{2^{n+1}} = \frac{2^n 5^n + q \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \frac{5^n + q}{2}$$

egész, mert a tört számlálója páros. És ugyanezt mondjuk ki végkövetkeztetésnek a második esetben is:

$$\frac{2 \cdot 10^n + A}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} \cdot 5^n + q \cdot 2^n}{2^{n+1}} == 5^n + \frac{q}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a szám végződésének jegyei egymás után egyértelműen adódnak, a tízes számrendszer 100-jegyű számai közt *egyetlen* olyan van, mely osztható 2^{100}-nal és amelyben csak 1-es és 2-es számjegyek fordulnak elő. Továbbá, hogy ez az állítás a 100-asok helyén (ti. mint kitevő és mint jegyek száma) bármely n természetes számra érvényes.

Turán György (Budapest)

Megjegyzések. 1. Lényegében ugyanígy lehet bizonyítani az állítást, ha az 1-es számjegy helyett páratlan jegyet mondunk benne, a 2-es helyett pedig párosat, de 0-tól különbözőt.

Lakner Péter (Budapest)

2. Érvényes az állítás bármely $4k+2$ alapú ($k > 0$, egész) számrendszerben is.