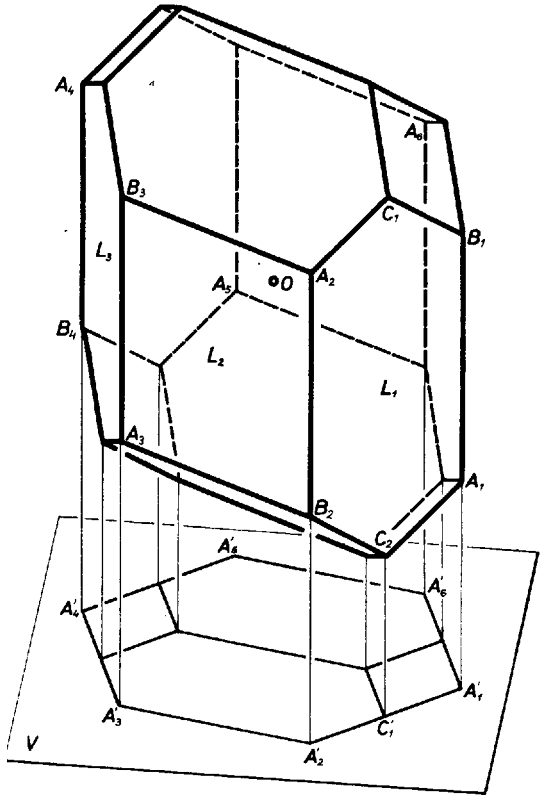
Szimmetriacentrummal bíró síkidom oldalainak száma páros, legegyszerűbb példája a paralelogramma, ilyenből 3-at véve egy közös csúcsba, már legalább 7 csúcsot adnak, ezért a föltevés szerinti poliéderek legegyszerűbb példája a paralelepipedon, és erre az állítás helyessége nyilvánvaló. (Két további példa lapunkból az 1407. gyakorlatban[1] vizsgált test és a rombdodekaéder[2]. Azt kell belátnunk, hogy a feltevés szerinti bármely P poliéderhez található olyan O pont, amelyre tükrözve P-nek bármelyik lapját, a tükörkép ugyancsak lapja P-nek.



1. Jelöljük P egy L_1 lapja egyik – függőlegesen tartott – élének alsó végpontját A_1-gyel, a felsőt B_1-gyel, ezek tükörképét a lap szimmetriacentrumára A_2-vel, illetve B_2-vel. Ekkor a föltevést L_1-re alkalmazva, A_2B_2 is éle L_1-nek, továbbá A_2B_2-ben csatlakozik L_1-hez P-nek egy további L_2 lapja. Ennek szimmetria-középpontjára tükrözve A_2B_2-t, ismét egy A_3B_3 élét kapjuk P-nek, rajta átléphetünk egy L_3 lapra, és így tovább. Az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, … élek egymással párhuzamosak, egyenlő hosszúak és a szomszédosak páronként ellentétes irányúak.

Ebben a tükrözési sorozatban eljutunk egy olyan k indexhez, amelyre az $A_{k+1}B_{k+1}$ él – amelyhez az L_k lap centrumán való tükrözéssel jutottunk, – beleesik egy már megjelölt A_jB_j kép ($j<k$) egyenesébe, viszont az A_kB_k kép egyenese még minden korábbi kép egyenesétől különböző. Ha ugyanis nem volna ilyen k, akkor P-nek végtelen sok éle és lapja volna, amit pedig kizárhatunk. (Annak ellenére is kizárhatjuk ezt, hogy a kitűzés nem mondta ki; ezt az észrevételt a probléma az igényes megoldótól elvárja.) Ekkor P konvexsége alapján, A_{k+1} vagy A_j -vel esik egybe, vagy B_j-vel, egyszersmind B_{k+1} az A_jB_j él másik végpontjával, mert konvex testnek nem lehet két éle egymás meghosszabbításán; továbbá $j=1$, mert $j>1$ esetén A_jB_j három lapnak, L_{j-1}-nek, L_j-nek és L_k-nak lenne közös éle, ami ismét lehetetlen.

Az $L_1, L_2, \ldots, L_k$ lapok – szögletes csődarabra emlékeztető – együttesét a poliéder A_1B_1-gyel párhuzamos *zónájának* nevezzük (kristálytani kifejezéssel élve). Természetesen azt várjuk, hogy L_1-nek a várt O pontra való tükörképét az L_i lapok közt találjuk meg ($i=3,\ldots,k-1$).

2. Vetítsük P-t A_1B_1 irányú vetítéssel egy rá merőleges V (vízszintes) síkra és jelöljük bármely X alakzat (csúcs, lap) ilyen vetületét X' -vel. Így A_i' és B_i' egybeesik. Az $A_i'A_{i+1}'$ szakasz az L_i kerületéből annak a két résznek a közös vetülete, amelyekre az szétesik az A_iB_i és $A_{i+1}B_{i+1}$ oldalak elhagyásával, hiszen P konvexsége alapján minden egyes lapja konvex sokszög, és L_i közte van a mondott párhuzamos éleknek.

Továbbá az L_i lap síkjának a vetülete az $A_i'A_{i+1}'$ egyenes, ezért P vetülete ennek az egyenesnek az egyik oldalára esik, hiszen P minden pontja az egyik oldalán van minden olyan síknak, amelyben benne van P-nek egy lapja. Ezt valamennyi i-re alkalmazva, az $A_1'A_2'\ldots A_k'=K$ sokszög konvex, és P vetülete ennek a belsejébe és a kerületére esik; más szóval: K a P vetületének ún. kontúrvonala. Minden egyes L_i-t meghosszabbítva az A_iB_i és $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenesek közti végtelen síksávvá, e k síksáv együttese elhatárol egy végtelen hasábos térrészt, melynek alapidoma K és P benne van e térrészben.

[1] Megoldását lásd K. M. L. 47 (1973) 62.

[2] Lásd pl. *Csákány Bélának* A méhek lépsejtjeiről, matematikus szemmel c. cikkében, K. M. L. 43 (1971) 109–117. E cikkből vettük ábránk ötletét *Szerk.*

A látott zóna P további lapjait szétválasztja két egymástól különálló részre, egy alsó S_a és egy felső S_f *süvegre*, pl. S_a-nak a zónával közös csúcsai A_1, B_2, A_3, B_4, ... valamint az L_i lapok esetleges további csúcsai a mondottak szomszédos párjai között. A süvegek minden egyes lapjának V-n levő vetülete centrálszimmetrikus konvex sokszög, mert tükrös a lap centrumának vetületére, hiszen szakasz felezőpontjának vetülete felezi a szakasz vetületét. Egyetlen ilyen lap vetülete sem lehet egyenesszakasz, mert P-nek nincs további, az A_1B_1-gyel párhuzamos lapja. Az egy süvegbe tartozó lapok vetülete hézagtalanul és egyrétűen kitölti K-t, mert a hasábos tér belsejében, A_1B_1-gyel párhuzamosan haladó minden egyenes két pontban metszi P határfelületét, mindegyik süveget 1–1 pontban. Ha tehát csak az egyik süveget vetítjük le, K-nak egy centrálszimmetrikus sokszögekre való felbontását kapjuk.

Alkalmazhatjuk erre a P. 144. probléma[3] megoldásában bizonyított állítást: ha egy konvex K sokszöget centrálszimmetrikus konvex sokszögekre lehet felbontani, akkor maga K is centrálszimmetrikus. Emiatt az A_1B_1 éllel párhuzamos zónában páros sok él van, $k = 2n$, tehát beszélhetünk szemközti élekről: $1 \leqq i \leqq n$ mellett az A_iB_i éllel szemben az $A_{n+i}B_{n+i}$ él van, két szomszédos él által meghatározott lap síkja párhuzamos a választott élekkel szemközti élek síkjával, és a szemközti élpárok távolsága egyenlő.

3. Az eddigiek szerint P tetszőleges L lapjának tetszőleges A_1B_1, A_2B_2 élpárjához található P-nek olyan szemközti L^* lapja, amelyik párhuzamos L-lel, és amelyiknek van A_1B_1-gyel párhuzamos $A_1^*B_1^*$, $A_2^*B_2^*$ élpárja, és még azt is tudjuk, hogy A_1B_1, és A_2B_2 távolsága egyenlő $A_1^*B_1^* *$ és $A_2^*B_2^*$ távolságával. Alkalmazzuk ezt a megállapítást a B_1, B_2 csúcsokhoz csatlakozó B_1C_1, B_2C_2 élpárra (nem zárva ki az $A_1 \equiv C_2$ lehetőséget sem), kapjuk először is, hogy a párhuzamos lap csak L^* lehet, mert P-nek L-lel legfeljebb csak egy lapja lehet párhuzamos, és az A_1B_1, A_2B_2, B_1C_1, B_2C_2 egyenesek által határolt paralelogramma egybevágó L^* megfelelő paralelogrammájával. Tehát A_1A_2 és $A_1^*A_2^*$ párhuzamosak és egyenlőek, és a felezőpontjaik által meghatározott szakasz felezőpontjára tükrözve őket egymásba mennek át. Feltehetjük, hogy L^* csúcsait eleve úgy betűztük meg, hogy ez a tükrözés A_1-t A_1^*-ba viszi. Az A_1A_2 szakasz felezőpontja L szimmetriacentruma, tehát $A_1A_1^*$ felezőpontja azonos az L és L^* szimmetriacentrumai által meghatározott szakasz felezőpontjával. Jelöljük ezt a felezőpontot O-val, mint láttuk, O helyzete nem függ attól, hogy L-en melyik csúcsot választjuk A_1 szerepére, ami azt jelenti, hogy L-t O-ra tükrözve L^* -ot kapjuk.

4. Ezzel beláttuk, hogy P tetszőleges L lapjához található olyan O pont, amelyre L-t tükrözve ismét P valamelyik lapját kapjuk. P szomszédos lapjaihoz ugyanaz a centrum tartozik, hiszen e centrumot most már az az él meghatározza, amelyben a választott lapok egymáshoz csatlakoznak. Mivel bármely lapról bármely lapra eljuthatunk, szomszédos lapok láncolatán át, P tetszőleges lapjához ugyanaz az O centrum tartozik, vagyis P centrálszimmetrikus, amint azt bizonyítanunk kellett.

[3] Megoldását lásd ezen szám 161. oldalán