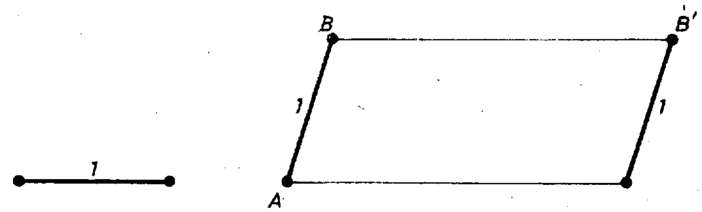
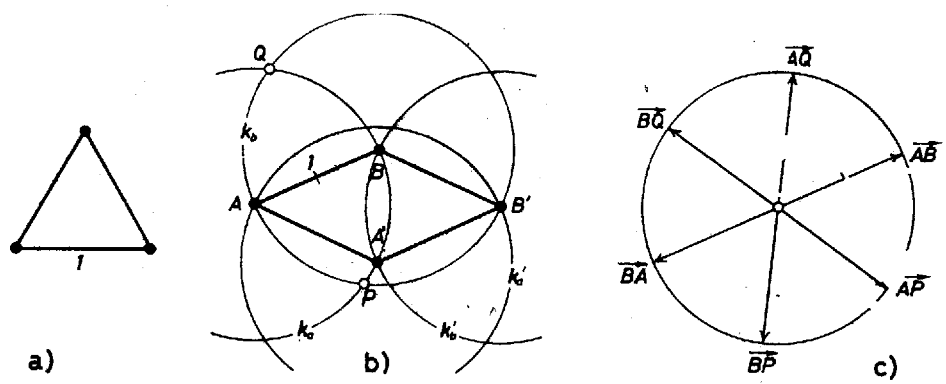
Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk, egy a követelménynek megfelelő ponthalmazt S_m jelölünk.

$m = 1$ esetében S_1-re legegyszerűbb példa egy tetszőleges egységszakasz két végpontja, de megfelel a végpontok halmaza akárhány, de véges számú egységszakasz egyesítésében is, ha bármely két nem ugyanazon egységszakaszból származó végpont távolsága 1-től különböző. Az 1. ábra második példáján speciálisan $AB = 1$ és $A'B'\#AB$; itt azt is mondhatjuk, hogy S_1 az $\overrightarrow{AB}$ egységszakasz és $AA' > 2$ az abszolút értékű vektorral eltolt képe alkotja, és még azt is, hogy az AA' szakasz és ennek az $\overrightarrow{AB}$ egységvektorral eltolt képe alkotja S_1-et (így sem AB', sem BA' nem lehet egységnyi).



1. ábra

S_2-re a legegyszerűbb példák: egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcspontjai, valamint egységnyi oldalú rombusz csúcsai, hacsak a rombusznak egyik átlója sem egységnyi, vagyis a rombusz bármelyik csúcsa körüli, egységnyi sugarú kör pontosan 2 csúcson megy át (2. ábra). Tovább körön mindig egységnyi sugarú kört értünk.



2. ábra

Visszatérve a rombuszra, ezt most úgy tekintjük, hogy az AB egységszakaszt egy $\overrightarrow{AA'}$ egységvektorral toltuk el. Ehhez A'-t az A körüli k_a körön kell vennünk, kivéve azonban a B pontját, mert akkor A-tóI csak 1 pont lenne egységnyire, B-től pedig 2. Nem vehetők A' szerepére továbbá k_a-nak a B körüli k_b körrel alkotott P, Q metszéspontjai, mert így B-től 3 pont lenne egységnyire. B'-t az A' körüli kör metszi ki k_b-ből. Ugyanezeket mondhatjuk el B-ről, ha a rombuszt AB-nek a $\overrightarrow{BB'}$-ral való eltolásával képeznénk; az így kizárt három vektor a fentebbi háromnak az AB szakasz felezőpontjára való tükörképe (az ábra c része).

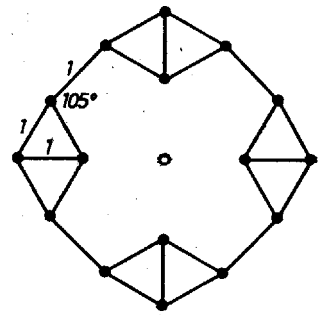
A rombusz példájának elemzésével tulajdonképpen eljárásmintát dolgoztunk ki tetszőleges m mellett S_m-ből egy megfelelő S_{m+1} kifejlesztésére:

S_m-et egyesítjük egy olyan S'_m, képével, amelyet belőle egy alkalmas egységvektorral való eltolás útján hozunk létre. Tegyük fel tehát, hogy létezik a követelményt kielégítő S_m, ahol $m \geqq 2$, és legyen egy ilyen $S_m = \{A,\, B_1,\, B_2,\, \dots,\, B_m,\, C,\, D,\, \dots,\, G\}$, ahol $B_i (i = 1, 2, \dots, m)$ az A-tól 1-re levő pontok AC, AD, $\dots$, $AG \neq 1$, az elemek száma $r(\geq m+1)$, továbbá $S'_m = \{A',\, B'_i,\, \dots,\, G'\}$.

Az eltolást az $\overrightarrow{AA'}$-val definiálva, A' az A körüli k_a egységkörön választandó. Azt mutatjuk meg, hogy ez mindig lehetséges. Nem viheti át az $\overrightarrow{AA'}$ az A-t a B_i pontok egyikébe sem, mert különben az A-tól 1-re levő pontok száma S_{m+1}-ben is csak m maradna – egy megjegyzéssel hamarosan visszatérünk még ide –, és nem lehet A' egységnyire a további B_i, C, $\dots$, G pontok valamelyikétől, különben az eltolás után attól a ponttól legalább $(m+2)$ pontja lenne S_{m+1}-nek 1 távolságban. Az utóbbi meglátás a $B-i$, $\dots$, G pontok körüli körök révén legföljebb $2(r-1)$ pontot zár ki k_a-ból, hiszen két körnek legföljebb 2 közös pontja van. Más körülmény nem teheti alkalmatlanná A'-t. – A beígért megjegyzés; az $\overrightarrow{AB}$ eltolás mégis fölemelhetné $(m+1)$-re S_{m+1}-ben az A-tól 1-re levő pontok számát, ha ti. egy C pontot éppen rátolna k_a-ra. Ez azonban kiesik a második kizárásban, mint k_a és k_c közös pontja.

Mivel az $\overrightarrow{AA'}$ eltolást megadhatja $\overrightarrow{B_iB'_i}$, $\dots$, $\overrightarrow{GG'}$ is, és eközben kaphatunk újabb kizárandó irányokat is, azért mindent egybevéve legföljebb $r\big[m+2(r-1)\big]$ egységvektor nem alkalmas $S'm$ és vele S_{m+1} mondott kifejlesztésére. Ebben az a lényeges, hogy ez a szám véges. Eszerint S_{m+1} végtelen sok módon képezhető S_m-ből, állításunkat – és vele a feladat állítását is – bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Annak belátásához, hogy minden m-hez létezik S_m, elég lett volna képezni egyetlen egységszakasz eltoltját, valamint eltoltjainak eltoltját és így tovább, a mondott korlátozásokkal. Így S_m elemeinek száma 2^m lenne. Indulásul avégett mutattunk egynél több példát, hogy az olvasó elképzeléseit elindítsuk. Ezzel a céllal mutattuk be S_2-re az egyenlő oldalú háromszöget is, és evégett mutatunk a 3. ábrán olyan S_3-at is, amely egyáltalán nem tartalmaz a fentiekben nem kizárt rombuszt, sőt éppen kizárt rombuszokból épül föl.



3. ábra

2. Nem volt lényeges fölírni a kizárandó eltolásvektorok számának megadott felső korlátját, csak az, hogy az összes kizárási típusokat megadjuk. A valóban kizárt vektorok száma az eltolásos eljárásban úgyis kisebb a korlátnál, ha S_m tartalmaz rombuszokat, illetve ha S_m pontjai közt előfordul 2 egységnyi vagy nagyobb távolság; mindkét körülmény föl is lép az egymás utáni S_m-ek eltolásos kifejlesztése során.

3. Fölvethető S_m létezésének kérdése a térben is, igen egyszerű példát nyújt S_3-ra a szabályos tetraéder, a kocka és a szabályos dodekaéder csúcsainak halmaza, S_4-re a szabályos oktaéder, S_5-re a szabályos ikozaéder csúcsainak halmaza. Tulajdonképpen itt is használható a kifejlesztésben az eltolásos eljárás, meggondolandó azonban, hogy két egységgömb metszheti egymást körben is, ekkor közös pontjaik száma nem véges.