A kérdéses szummát – általános tagjában a kéttagú kifejezés négyzetét kifejtve – három szumma összegévé alakíthatjuk. Az állandó közös tényezőket mindjárt kiemeljük:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(n^2-4n\nu+4\nu^2)\cdot\binom{n}{\nu}=n^2\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}-4n\sum_{\nu=0}^{n}\nu\cdot\binom{n}{\nu}+4\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\binom{n}{\nu}.$$

Az első szumma értéke az ismert

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n \tag{1}$$

azonosság alapján [1] $n^2\cdot 2^n$. A másodikban a $\nu=0$-hoz tartozó tag 0, ha pedig $\nu\geq 1$, akkor a tagokat így alakítjuk:

$$\nu\cdot\binom{n}{\nu}=\frac{\nu\cdot n!}{\nu!(n-\nu)!}=n\frac{(n-1)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!}=n\binom{n-1}{\nu-1}, \tag{2}$$

$$-4n\sum_{\nu=0}^{n}\nu\binom{n}{\nu}=-4n^2\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n-1}{\nu-1}=-4n^2\sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\mu}=-4n^2\cdot 2^{n-1}=-2n^2\cdot 2^n.$$

(Kiemeltük a közös, állandó tényezőt, új $\mu=\nu-1$ szummációs betűt vezettünk be, végül ismét alkalmaztuk (1)-et.)

Végül, a harmadik szummában hasonlóan $\nu=0$ ismét 0-t ad, így (2), valamint $\nu=(\nu-1)+1$, és ismét (2), végül (1) alapján

$$\nu^2\cdot\binom{n}{\nu}=n\nu\cdot\binom{n-1}{\nu-1}=n(\nu-1)\binom{n-1}{\nu-1}+n\binom{n-1}{\nu-1},$$

$$=n(n-1)\binom{n-2}{\nu-2}+n\binom{n-1}{\nu-1},\ \text{tehát}$$

$$4\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\cdot\binom{n}{\nu}=4n(n-1)\sum_{\mu=0}^{n-2}\binom{n-2}{\mu}+4n\sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\mu}=$$

$$=4n^2\cdot 2^{n-2}-4n\cdot 2^{n-2}+4n\cdot 2^{n-1}=n^2\cdot 2^n+n\cdot 2^n.$$

Mindezeket egybevetve a három szumma összege valóban egyenlő az állítás jobb oldalával. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Turi Erzsébet (Győr, Révai M. Gimn.)

Megjegyzés. Ha a binomiális tételt az $(1+x)^n$ hatványra alkalmazzuk, a

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu=(1+x)^n$$

összefüggést kapjuk. A megoldásunkban használt (1) azonosság ebből az $x=1$ helyettesítéssel nyerhető. Ha előbb k-szor deriválunk x szerint, és osztunk $k!$-sal, akkor a helyettesítéssel a

$$\sum_{\nu=0}^{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{k}=\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$$

összefüggésre jutunk.

Így $k=1$ és $k=2$ mellett

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\nu=n\cdot 2^{n-1}\quad\text{és}\quad\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\nu(\nu-1)=n(n-1)\cdot 2^{n-2},$$

amikből a feladat állítása már könnyen bizonyítható.

[1] *Czapáry E. – Gyapjas F. – Horvay K.–Pálmay L.:* Matematika a gimn. és szakközépisk. IV. oszt. számára. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. 243. old. 61. feladat.