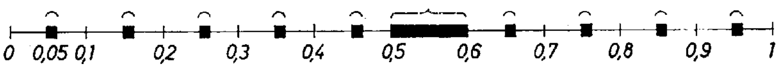
I. megoldás. A véletlenszerű kiválasztás a következőképpen értendő: annak valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a $[0;\, 1]$ intervallum valamely $[a,\, b]$ vagy $[a,\, b)$ vagy $(a,\, b]$ vagy $(a,\, b)$ részintervallumába esik, egyenlő az intervallum $|b-a|$ hosszával.

Ha a kiválasztott szám tizedes tört alakjában az első n jegy között előfordul 5-ös jegy, akkor a kiválasztott számot „jó szám”-nak fogjuk nevezni. Próbáljunk képet alkotni a jó számok elhelyezkedéséről. Ha $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k$ az 5-östől különböző számjegyek és $k \leqq n-1$, akkor a jobbról nyitott $[0,a_1a_2\ldots a_k5;\, 0,a_1a_2\ldots a_k6)$ intervallum minden száma jó szám.

Fordítva, minden jó szám beletartozik egy, az előbbi típusú intervallumba, mert véve az első 5-ös jegyét – legyen ennek a sorszáma m, és legyenek ezt megelőző tizedes jegyei $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{m-1}$ –, mindenesetre fennáll $m \leqq n$ és $a_i \neq 5$, ha $i \leq m-1$, tehát a jó szám benne van a következő intervallumban:

(1) $$[0,\, a_1a_2\ldots a_{m-1}5; \qquad 0,\, {}_1a_2\ldots a_{m-1}6).$$



Ábránk $n \leqq 2$-re szemlélteti a jó számokat tartalmazó intervallumokat.

Az (1) alakú intervallumok diszjunktok (páronként nincs közös pontjuk), ezért a keresett P valószínűséget az ilyen intervallumok hosszának összege adja meg. Az (1) hossza 10^{-m}, az ilyenek száma annyi, ahányféleképp az $a_1a_2\ldots a_{m-1}$ szám megválasztható, vagyis 9^{m-1}, és együttes $9^{m-1}\cdot 10^{-m}$ hosszukat összegeznünk kell $m=1,\, 2,\, \ldots,\, n$-re.

$$P=\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9^2}{10^3}+\ldots+\frac{9^{n-1}}{10^n}=\frac{1}{10}\left\{1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

(1)-ből látható, hogy a tizedes törttel kétféleképpen előállítható számoknak a véges alakjára gondoltunk. Az első bekezdésben adott értelmezés szerint azonban nem változtat eredményünkön, ha a végtelen alakra gondolunk.

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás a tankönyv egy „olvasmány” jelzésű fejezetét használta fel.[1]

2. Ha $n \to \infty$, akkor $P \to 1$, eszerint annak valószínűsége, hogy a $[0;\, 1]$-ból véletlenszerűen kiválasztott szám tizedes tört alakjában szerepel 5-ös számjegy: 1 (biztos esemény). Ezt azonban már értelmezésünk tartalmazta.

II. megoldás. A kérdéses eseménnyel ellentétes esemény valószínűségét határozzuk meg.

Osszuk a $[0;\, 1]$ intervallumot 10^n számú, egymással egyenlő, 10^{-n} hosszú részintervallumra, így az osztópontok azok a véges tizedes törtek, amelyeknek legföljebb n tizedes jegyük van, más szóval az $1,\, 2,\, \ldots,\, 10^n-1$ egész számok 10^{-n}-szeresei. Így minden egyes részintervallum minden száma akkor és csak akkor „nem jó” szám, ha az intervallum bal végpontja nem jó szám.

A bal végpontok közül azok a nem jó számok, amelyeknek 10^n-szeresében nem fordul elő az 5-ös, azaz minden jegyük a 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 közül való. Számuk 9^n, így a nem jó intervallumok együttes hossza $\left(\frac{9}{10}\right)^n$. Ebből értelmezhető az I. megoldás egyszerű eredménye.

---

[1] *Czapáry E.–Gyapjas F.–Horvay Katalin–Pálmay L.:* Matematika a gimn. IV. o. számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969. 269. oldal: Valószínűségek meghatározása geometriai módszerekkel.