a) Ha P, Q, R a sík tetszőleges pontjai, és S a P-nek a QR szakasz felezőpontjára, F-re vonatkozó tükörképe, akkor a PR szakaszt F-re tükrözve SQ-t kapjuk, és emiatt a $\overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{QS}$ vektorok egyenlők. Ennek az észrevételnek az alapján átfogalmazhatjuk a halmaz (1) tulajdonságát:

(1a) Ha P és R a H tetszőleges pontjai, akkor H pontjait a $\overrightarrow{PR}$ vektorral eltolva ismét H-beli pontokat kapunk.

b) Legyen P, Q, R a H-nak tetszőleges három, nem egy egyenesen levő pontja. [A (2) tulajdonság alapján ilyen van.] Q-t $\overrightarrow{PR}$-rel eltolva a H-beli S_1 pontot kapjuk, és ebből kiindulva lépésről lépésre kapjuk $\overrightarrow{PR}$-rel való eltolással a H-beli $S_2, \ldots, S_n, \ldots$ pontokat, amelyek a QS_1, egyenesen vannak, és amelyekre $\overrightarrow{QS_n} = n\overrightarrow{PR}$. Q-t $\overrightarrow{RP}$-ral és $\overrightarrow{RP}$ többszöröseivel eltolva kapjuk a H-beli $S_{-1}, \ldots, S_{-n}, \ldots$ pontokat, amelyek a QS_1 egyenesen vannak, és amelyekre $\overrightarrow{QS_{-n}} = -n \cdot \overrightarrow{PR}$. A QS_1 egyenes így kapott pontjait a $\overrightarrow{PQ}$ vektor többszöröseivel eltolva egy paralelogrammarács pontjait kapjuk, amelynek minden pontja H-beli, és szemei a PRS_1Q paralelogrammával egybevágóak.

Megmutatjuk, hogy a sík tetszőleges k körében van H-nak pontja. Legyen ugyanis ε a k sugarának a negyede, ekkor (2) szerint van olyan ε sugarú kör, amelyben H-nak van három nem egy egyenesen levő pontja. Az ezekre támaszkodó paralelogramma rácsnak van k-beli pontja, és az *b)* szerint H-beli. Legyen ugyanis $PQRS$ a paralelogrammarácsnak az a szeme, amely tartalmazza k középpontját (illetve bármelyik olyan, ha több olyan is van). E középpontnak a P-től mért távolsága nem nagyobb, mint a $PQRS$ nagyobbik átlója, ami viszont nem nagyobb a PQR háromszöget lefedő kör átmérőjének a 2-szeresénél, 4ε-nál, ez pedig nem más, mint k sugara.

c) A most bizonyított (3) tulajdonságból következik a feladat állítása. Ha ugyanis a feladat állítása nem volna igaz, volna olyan k kör, amelyben H-nak legfeljebb csak véges sok pontja volna. Legyen O a k-nak H-hoz nem tartozó pontja, és legyen P a H-nak K-beli pontjai közül az O-hoz legközelebbi. Akkor a O körüli, OP sugarú k_0 körben (vagy a vele koncentrikus, teljesen k-ban fekvő körben, ha k_0 még nem volna teljesen k-ban) H-nak nem volna pontja, ami (3) szerint nem lehet. Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.