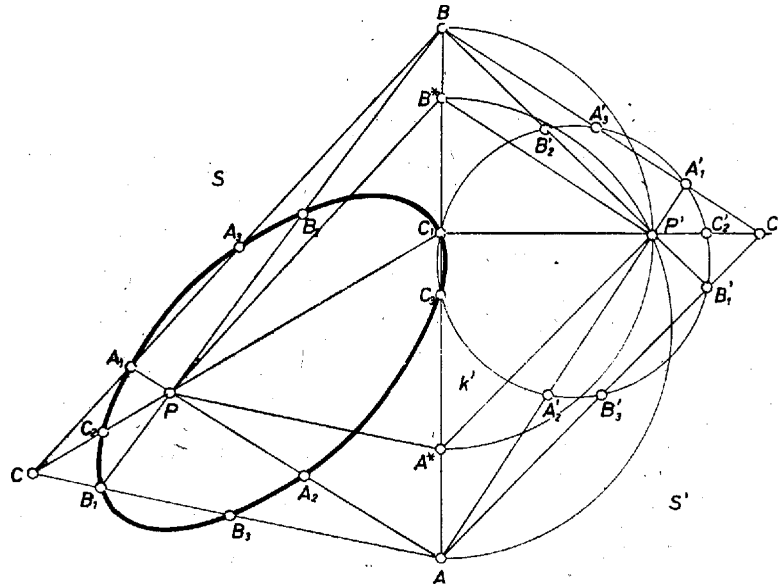
I. a) Ha P-ként történetesen éppen az ABC háromszög magasságpontja van megadva (ami belső pont, ha a háromszög hegyesszögű), akkor tulajdonképpen nincs mit bizonyítani, hiszen ekkor A_1, B_1 és C_1 a magasságtalppontok és ezért az állításbeli 9 pont rajta van az ABC háromszög Feuerbach-féle körén,[1] márpedig a kör különleges esete az ellipszisnek; az állítás ekkor tehát igaz. (A helyzetet az 1. ábra jobb oldali fele mutatja, ha minden betűjel felső kiegészítő vesszőjét elhagyjuk.)



1. ábra

b) P tetszőleges megválasztása esetén bizonyításunkat egy alkalmas transzformációval visszavezetjük az a) esetre. Azt akarjuk elérni, hogy az AA_1B szög két szárának képei merőlegesen álljanak egymásra, ugyanígy a BB_1A szög szárainak képei is, mert így P képe a háromszög képének magasságpontja lesz.

Húzzunk párhuzamost P-n át CB-vel-és CA-val, jelöljük az AB egyenesen keletkezett metszéspontjukat B^*-gal, illetve A^*-gal. Vegyünk másrészt egy olyan S' síkot, mely alakzatunk S síkját az AB egyenesben metszi, rajzoljuk meg benne AB egyik oldalán az AB^* és A^*B átmérőjű félköröket, jelöljük metszéspontjukat P'-vel; P' létrejön, mert a félkörök metszik egymást, ugyanis a PA^*B^* és CAB háromszögek hasonló helyzetűek a C_1 centrumra nézve, ezért pontjainak sorrendje az AB egyenesen: A, A^*, C_1, B^*, B. Vetítsük végül egész alakzatunkat a PP' egyenessel párhuzamos vetítősugarakkal S'-re és jelöljük minden egyes X pont vetületét X'-vel. (Az 1. ábrán S'-t az S-be belefordítva látjuk úgy, hogy P' az AB-nek P-t nem tartalmazó oldalán legyen.)

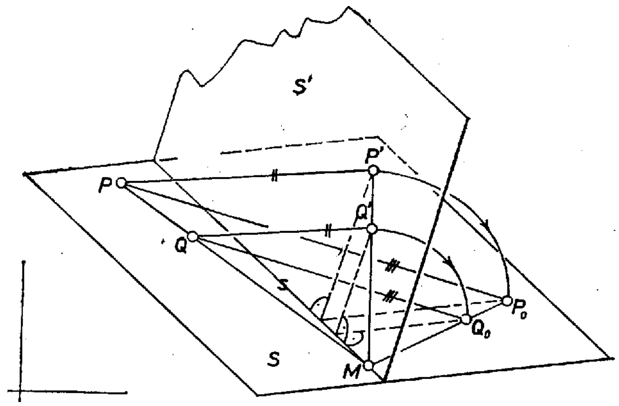
Vetítésünk mellett egy egyenesen levő pontok vetületei egy egyenesen adódnak (speciálisan az AB egyenes minden pontjának képe önmaga), párhuzamos egyenesek vetületei párhuzamosak, és szakasz felezőpontjának vetülete felezi a szakasz vetületét. Ezek szerint C' azonos az A-n át A^*P'-vel és B-n át B^*P'-vel húzott párhuzamosok metszéspontjával, e két párhuzamosból a BP', ill. AP' egyenes éppen B_1'-t, ill. A_1'-t metszi ki, mert BP', AP' a felhasznált körök Thalész-tulajdonsága alapján merőlegesen állnak AC'-re, ill. BC'-re. Ennélfogva P' valóban magasságpontja az ABC' háromszögnek. Továbbá a 2-es és a 3-as indexű pontok vetülete rendre felezi a megfelelő képszakaszt, így a feladat állításában szereplő 9 pont vetülete rajta van az ABC' háromszög k' Feuerbach-körén.

Így már csak azt kell belátnunk, hogy k'-nek S-beli eredetije – mondhatjuk azonban így is: a k' körnek PP' irányú párhuzamos vetülete az S síkra – ellipszis. (A tananyagból ezt egy kör párhuzamos vetületéről elsődlegesen csak azokra az esetekre tudjuk, ha a PP' irány merőleges vagy az S-re, vagy az S'-re, de síkbeli nyújtással könnyen kiterjeszthető minden olyan esetre, ha S és S' metszésvonala merőleges a vetítési irányra; ekkor is az ellipszis egyik tengelye párhuzamos a metszésvonallal. Ezt az olvasóra hagyjuk.)

II. Megmutatjuk, hogy k'-nak S-re való PP' irányú vetülete – nevezzük egyelőre v vonalnak – akkor is ellipszis, ha PP' nem merőleges az S és S' metszésvonalára. Ezt a következő lépésekben végezzük: 1. k'-t belefordítjuk S-be – új helyzete a k_0 kör –, egymás megfelelőinek nevezzük v-nek és k_0-nak egy-egy olyan pontját, melyek k' ugyanazon pontjából keletkeztek vetítés, illetve elfordítás útján, és megállapítunk egy síkbeli rokonságot a megfelelő pontpárok közt, ún. *ferde* affinitást. (Az alakzatból mintegy kikapcsoljuk k'-t.) – 2. Meghatározzuk k_0-nak azt a két, egymásra merőleges fél átmérőjét, amelyek v-beli megfelelői ugyancsak merőlegesek egymásra; az utóbbiak lesznek az állításunk szerinti ellipszis tengelyei. – 3. Végül v tetszőleges pontjáról kimutatjuk, hogy rajta van azon az ellipszisen, melynek szimmetriatengelyei a most mondott képek.

1. Rátérve tervünk végrehajtására, legyen (a fenti) S két pontja P és Q, az S'-nek két pontja P', Q' úgy, hogy $PP' \parallel QQ'$– tehát pl. P és P' egymás vetületei –, és S'-t az S-be belefordítva az s metszésvonaluk körül, legyen P', Q' új helyzete P_0, Q_0. Azt állítjuk, hogy $PP_0 \parallel QQ_0$ (2. ábra).

[1] A háromszög Feuerbach-körére vonatkozó legszűkebb ismeretanyagot legutóbb az F. 1753. feladat megoldásában bizonyítottuk be, K. M. L. 44 (1972), 195. oldal. – *Szerk.*



2. ábra

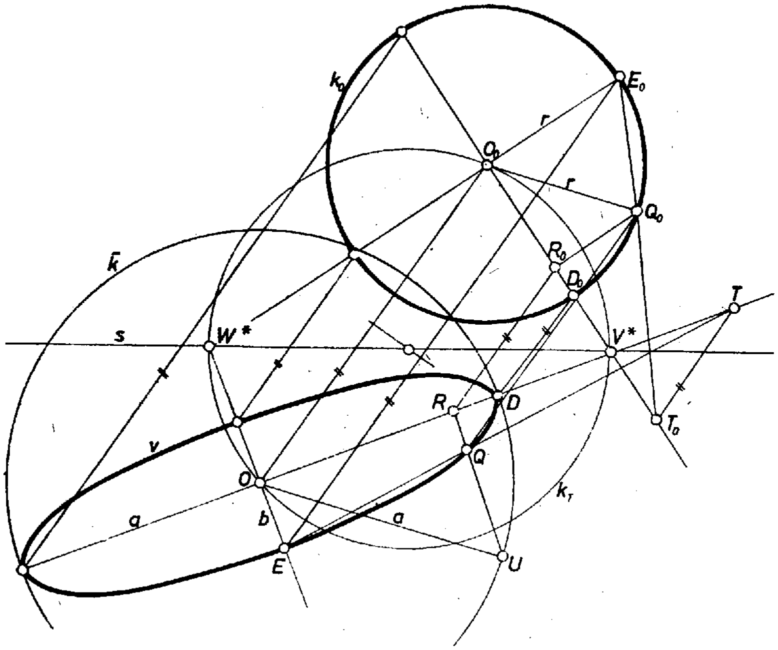
Ugyanis ha PQ metszi s-et egy M pontban, akkor M vetülete, továbbá a leforgatottja is önmaga, ezért átmegy rajta $P'Q'$ is, P_0Q_0 is, és a párhuzamos vetítés, ill. a mozgás alapján

$$PM : QM = P'M : Q'M = P_0M : Q_0M,$$

tehát PP_0 és QQ_0 a PMP_0 szög szárainak párhuzamos szelői.

Ha pedig PQ párhuzamos s-sel, akkor $P'Q'$ sem metszheti s-et (mert a $PP'Q$ sík PQ miatt párhuzamos s-sel), ezért P_0Q_0 sem metszi, tehát párhuzamosak s-sel és PQ-val, így pedig $PQQ'P'$ és $P'Q'Q_0P_0$ paralelogrammák, $P_0Q_0 \sharp P'Q' \sharp PQ$, ennélfogva PQQ_0P_0 is paralelogramma.

Eszerint – és a megfelelő egyenesekről közben mondottak alapján – a v és k_0 alakzatok közti kapcsolat csak abban tér el a merőleges affinitástól, hogy a megfelelő pontokat összekötő (pl. PP_0) egyenesek közös iránya nem merőleges s-re, a megfelelő egyenesek közös pontjait tartalmazó tengelyre. (Ugyanis $P'P_0$ mindenesetre merőleges s-re, és ha PP_0 is merőleges lenne rá, akkor PP' is merőleges lenne rá, mint az s-re merőleges $PP'P_0$ sík egyenese; ezt az esetet pedig a tankönyvből ismerjük.) Emiatt tesszük a talált rokonság elnevezésében a„ferde" jelzőt az„affinitás" elé, a„merőleges" jelző helyére. Az s tengellyel, és a P, P_0 pontpárral meghatározott ferde affinitásban a v vetület és a k_0 kör egymás képei, megfelelői.



3. ábra

2. Legyen k' középpontja O', S-en levő vetülete O, leforgatottja O_0, és messék s-et k_0-nak a keresett egymásra merőleges átmérői (meghosszabbításaik) V^*-ban, W^*-ban (3. ábra). Követelésünk szerint a V^*W^* szakasz O-ból is derékszögben látszik, ezért O_0 is, O is rajta van a szakasz fölötti k_T Thalész-körön; eszerint k_T-nek a középpontja rajta van egyrészt s-en, másrészt az OO_0 húr felező merőlegesén. Így k_T egyértelműen megszerkeszthető, és vele V^*, W^* mindig létrejön. Osszuk szét a V^* és W^* jelet e kör és s metszéspontjaira úgy, hogy k_0-nak az O_0V^*, O_0W^* egyenesen levő egyik-egyik pontját D_0-lal, E_0-lal jelölve, ezek v-beli D és E megfelelőire álljon: $OD \geq OE$; ekkor azt állítjuk, hogy az állításbeli ellipszis fél nagytengelye az $OD = a$ szakasz, fél kistengelye az $OE = b$ szakasz, tehát az ellipszis előállítható az O közepű, a sugarú k kör (főkör) OE irányú és b/a arányú összenyomásával.

3. A tervezett bizonyításhoz szükségünk lesz a következő jelölésekre. A D_0E_0 negyedkör tetszőleges belső pontja Q_0, ennek O_0D_0 on levő vetülete R_0, az E_0Q_0 és O_0D_0 egyenesek metszéspontja T_0; e pontok megfelelője a vetületi rendszerben rendre Q (a v-n), R, T, továbbá a k kör és az RQ félegyenes metszéspontja U, és k_0 sugara r.

A nyilvánvalóan hasonló háromszögpárok, a megfelelő pontpárok összekötő egyeneseinek párhuzamos volta és a szelők tétele alapján

$$\frac{RQ}{b}=\frac{RQ}{OE}=\frac{RT}{OT}=\frac{R_0T_0}{O_0T_0}=\frac{R_0Q_0}{O_0E_0}=\frac{R_0Q_0}{r},$$

tehát

$$RQ=\frac{b}{r}R_0Q_0. \tag{1}$$

Másrészt U értelmezése alapján

$$\frac{OR}{OU}=\frac{OR}{a}=\frac{OR}{OD}=\frac{O_0R_0}{O_0D_0}=\frac{O_0R_0}{r}=\frac{O_0R_0}{O_0Q_0},$$

eszerint UOR és $Q_0O_0B_0$ hasonló derékszögű háromszögek, tehát

$$\frac{RU}{OU}=\frac{R_0Q_0}{O_0Q_0},\qquad \text{azaz}\qquad RU=\frac{a}{r}R_0Q_0.$$

Ezzel (1)-et osztva pedig

$$\frac{RQ}{RU}=\frac{b}{a},$$

vagyis Q, a v vonal pontja, rajta van az állításunk szerinti ellipszisen. Mindezek szerint v valóban ellipszis, és evvel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Eredményeinkből az is következik, hogy ellipszisnek merőleges affin megfelelője is ellipszis. Ha ugyanis pl. CC_1 nem merőleges AB-re, és eredeti háromszögünket – a 9 ponttal és a rajtuk átmenő (immár bebizonyított) ellipszissel együtt – merőleges affinitással úgy transzformáljuk, hogy az AA_1B szög képe derékszögnek adódjék, ebből az alakzatból újabb merőleges affinitással egy háromszöget kaphatunk, Feuerbach körének 9 pontjával, eszerint az eredeti ellipszisnek az első affinitásbeli képe is ellipszis. (Az első affinitás tengelyének AB-t véve, A_1 képéül az AB fölötti Thalész-kör és az A_1-en átmenő (merőleges) egyenes metszéspontja választandó; és ha a második tengely BC, és hasonlóan a BB_1C szög képét kívánjuk derékszöggé transzformálni, akkor P újabb képe már magasságpont, mert AA_1 újabb képe is merőleges lesz BC-re.