(1) $$\frac{1}{2}\Big(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} nx - \operatorname{tg}(n-1)x\Big) > \frac{1}{n}\operatorname{tg} nx.$$

1. Az $n=3$ esetben azt kell bizonyítanunk, hogy ha $0<x<\pi/6$, akkor

(2) $$\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x) > \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x.$$

A $\operatorname{tg} x = y$ jelöléssel egyrészt

(3) $$0 < y < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

másrészt
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2y}{1-y^2}, \qquad \operatorname{tg} 3x = \frac{3y-y^3}{1-3y^2}.$$
Ezeket (2)-be beírva, a bizonyítandó állítás ekvivalens átalakításokkal a következőbe megy át:
$$3y + \frac{3y-y^3}{1-3y^2} > \frac{6y}{1-y^2}.$$
Itt a nevezők (3) szerint pozitívok, így újabb ekvivalens átalakításokkal
$$3y(1-3y^2)(1-y^2) + y(3-y^2)(1-y^2) - 6y(1-3y^2) = 2y(1+5y^2) > 0.$$

Az utolsó alak helyessége nyilvánvaló, ezzel (2)-t bebizonyítottuk.

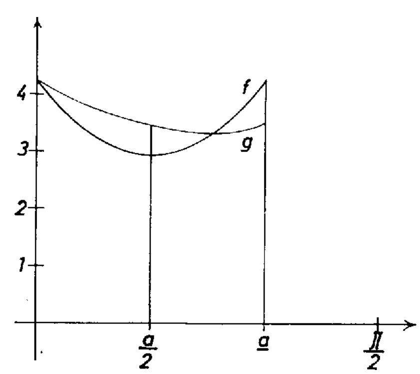
Ha nx-et a-val jelöljük, és (1)-et a pozitív $\dfrac{x}{2}$-lel osztjuk, a

(4) $$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0}{x} + \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}(a-x)}{x} > 2\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 0}{a}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mi ezt fogjuk bizonyítani, és közben az a és x számokról csak azt használjuk fel, hogy

(5) $$0 < x < \frac{a}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

Rögzített a mellett a (4) bal oldalán álló kifejezés x függvénye, jelöljük ezt a függvényt $f(x)$-szel. Ez a függvény az $x=\dfrac{a}{2}$ helyen egyenlő (4) jobb oldalával (1. ábra), így elég lesz belátni, hogy $f(x)$ monoton fogy a $0 \le x \le \dfrac{a}{2}$ szakaszon.



1. ábra

Mivel a $\operatorname{tg} x$ függvény deriváltja $1/\cos^2 x$, a Newton-Leibniz formula szerint
$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0 = \int_0^x \frac{dt}{\cos^2 t},$$
$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}(a-x) = \int_{a-x}^{a} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^x \frac{dt}{\cos^2(a-t)}.$$

Emiatt

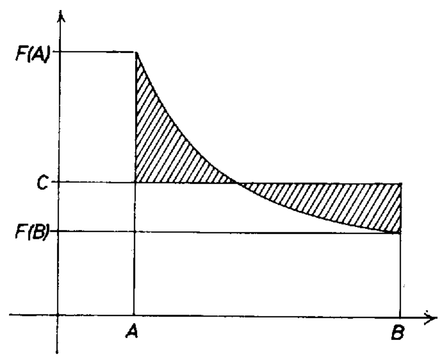
$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left[\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2(a-t)}\right] dt, \tag{6}$$

azaz $f(x)$ a

$$g(t) = \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2(a-t)} \tag{7}$$

függvénynek ún. integrálközepe:

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt. \tag{8}$$



2. ábra

Általában egy függvény integrálközepe egy szakaszon az a konstans, amivel a függvényt helyettesítve az integrálja nem változik meg: az $F(x)$ függvénynek az $(A,\,B)$ szakaszon az integrálközepe C, ha (2. ábra)

$$\int_A^B F(x)\,dx = \int_A^B C\,dx, \qquad \text{azaz} \qquad C = \frac{1}{B-A}\int_A^B F(x)\,dx.$$

Ha $F(x)$ szigorúan monoton fogy az A, B szakaszon, akkor

$$F(A) > \frac{1}{B-A}\int_A^B F(x)\,dx > F(B), \tag{9}$$

hiszen $F(x)$-et az egész $(A,\,B)$ szakaszon $F(A)$-val helyettesítve az integrál nő, $F(B)$-vel helyettesítve pedig fogy:

$$\int_A^B F(A)\,dx < \int_A^B F(x)\,dx < \int_A^B F(B)\,dx.$$

Ennek alapján azt várjuk, hogy ha a $g(x)$ függvény monoton fogy a $0 \le x \le b$ szakaszon, akkor a $(0,\,x)$ szakaszon vett integrálközepe az x monoton fogyó függvénye. Valóban, ha

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt,$$

és $0 < x < y \le b$, akkor $f(x) < g(x)$, és

$$\int_0^y g(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt + \int_x^y g(t)\,dt = \int_0^x f(x)\,dt + \int_x^y g(t)\,dt < \int_0^x f(x)\,dt + \int_x^y f(x)\,dt = \int_0^y f(x)\,dt,$$

tehát az $f(x)$ konstansokkal a $(0,\, y)$ szakaszon vett integrálja nagyobb g integráljánál, és így g integrálközepe kisebb $f(x)$-nél:

$$\frac{1}{y}\int\limits_0^y g(t)\,dt < \frac{1}{y}\int\limits_0^y f(x)\,dt = f(x).$$

Ha tehát belátjuk, hogy a (7) alatti $g(t)$ függvény monoton fogy a $0 \le t \le \dfrac{a}{2}$ szakaszon, akkor ebből következik, hogy ott a (8)-cal definiált $f(x)$ függvény is monoton fogy, és azt már beláttuk, hogy ebből következik (4). A $g(t)$ függvény deriváltja,

$$g\,'(t) = \frac{2\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} - \frac{2\operatorname{tg}(a-t)}{\cos^2(a-t)}$$

$0 < t < \dfrac{a}{2}$ mellett negatív, mert $0 < t < a - t < \dfrac{\pi}{2}$ miatt

$$0 < \operatorname{tg} t < \operatorname{tg}(a-t) \qquad \text{és} \qquad 0 < \cos(a-t) < \cos t,$$

tehát

$$\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} < \frac{\operatorname{tg}(a-t)}{\cos^2(a-t)},$$

állításunkat ezzel bebizonyítottuk.