Legyen $a = \sin^2 x$, $b = \cos^2 y$, ekkor

$$0 \le a \le 1; \qquad 0 \le b \le 1, \tag{4}$$

teljesül tetszőleges x, y mellett, és könnyen látható az is, hogy ha a, b olyan számpár, amelyre (4) teljesül, akkor van olyan x, y számpár, amelyre $\sin^2 x = a$, $\cos^2 y = b$. Emiatt feladatunk ekvivalens a következővel: határozzuk meg a sík azon $P(u,\, v)$ pontjainak mértani helyét, melyekre az

$$f(a) + f(b) = u, \tag{5}$$
$$a + b = v \tag{6}$$

egyenletrendszernek van olyan a, b megoldása, amelyre (4) teljesül. (4)-ből és (6)-ból azonnal látható, hogy

$$0 \le v \le 2, \tag{i}$$

ez az $(u,\, v)$ számpárra vonatkozó első szükséges feltétel.

Legyen először v a zárt $[0,\, 1]$ intervallum tetszőleges rögzített pontja: $0 \le v \le 1$. Ekkor u a

$$g(x) = f(x) + f(v - x) \tag{7}$$

függvény értékkészletét futja be, ha a függvényt azokra az x-ekre értelmezzük, amelyekre az

$$a = x, \quad b = v - x$$

számokra teljesül (4), tehát amelyekre

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le v - x \le 1,$$

azaz $0 \le x \le v$.

A $v = 0$ esettől mint triviálistól a továbbiakban eltekintünk, hiszen ekkor g értékkészlete a $g(0) = 2f(0)$ számból áll. Legyen tehát $0 < v \le 1$, ekkor g értelmezési tartománya a zárt $[0,\, v]$ intervallum. Itt ez a függvény szimmetrikus az $x = \dfrac{v}{2}$ abszcisszájú pontra:

$$g\left(\frac{v}{2} + \varDelta\right) = f\left(\frac{v}{2} + \varDelta\right) + f\left(\frac{v}{2} - \varDelta\right) = g\left(\frac{v}{2} - \varDelta\right),$$

tehát g-nek a $[0,\, v]$ feletti értékkészlete megegyezik a $\left[0,\, \dfrac{v}{2}\right]$ feletti értékkészletével. Megmutatjuk, hogy g az egész $[0,\, v]$ intervallumban konvex, és $\left[0,\, \dfrac{v}{2}\right]$-ben monoton fogy, $\left[\dfrac{v}{2}, v\right]$-ben monoton nő. Valóban, legyen $0 \le x_1 < x_2 \le v$ és legyen λ a $[0,\, 1]$ intervallum tetszőleges pontja, akkor

$$g(\lambda x_1 + \mu x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) + f(\lambda y_1 + \mu y_2) \le$$
$$\le \lambda\big[f(x_1) + f(y_1)\big] + \mu\big[f(x_2) + f(y_2)\big] = \lambda g(x_1) + \mu g(x_2),$$

ahol $\mu = 1 - \lambda$, $y_1 = v - x_1$, $y_2 = v - x_2$. Ezzel beláttuk, hogy g konvex, és rátérünk annak a bizonyítására, hogy a $\left[0,\, \dfrac{v}{2}\right]$ szakaszon monoton fogy.

A konvexség definíciójában szereplő

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

abszcisszájú, és

$$y_\lambda = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$$

ordinátájú $H_\lambda(x_\lambda,\, y_\lambda)$ pont az $\big(x_1, f(x_1)\big)$, $\big(x_2, f(x_2)\big)$ pontokat összekötő szakasz pontja, nevezetesen az a pont, amely a szakaszt $(1 - \lambda)$:λ arányban osztja. Jelöljük $e(x;\, x_1,\, x_2)$-vel azt a lineáris függvényt, amelynek az értéke x_1-ben $f(x_1)$, x_2-ben $f(x_2)$. A H_λ pont rajta van ennek a függvénynek a képén, így a konvexség feltétele azt jelenti, hogy az $x_1 \le x \le x_2$ szakaszon az $f(x)$ függvény képe $e(x;\, x_1,\, x_2)$ alatt halad:

$$f(x) \le e(x;\, x_1,\, x_2), \quad \text{ha } x_1 \le x \le x_2.$$

Szükségünk lesz arra is, hogy ha $f(x)$ konvex, akkor

$$f(x) \ge e(x;\, x_1,\, x_2), \quad \text{ha } x < x_1, \quad \text{vagy } x > x_2.$$

Valóban, legyen például $x_0 < x_1$, akkor $f(x)$ konvex volta miatt

$$f(x_1) \le e(x_1;\, x_0,\ x_2),$$

viszont $f(x_1) = e(x_1;\, x_1,\, x_2)$, tehát az $e(x;\, x_1,\, x_2)$ lineáris függvény $x < x_2$ mellett $e(x;\, x_0,\, x_2)$ alatt halad:

$$f(x_0) = e(x_0;\, x_0,\, x_2) \geq e(x_0;\, x_1,\, x_2).$$

E megjegyzés után visszatérünk g monotonitásának a bizonyítására.

Legyen y_1 és y_2 az $f(x)$ értelmezési tartományának oly pontja, melyre $y_1 \leq x_1$, $y_2 \geq x_2$ teljesül, azaz legyen az $[x_1,\, x_2]$ szakasz az $[y_1,\, y_2]$ szakasz része. Mivel $f(x)$ az $e(x;\, y_1,\, y_2)$ alatt van, azért $e(x;\, y_1,\, y_2)$ alatt van $f(x)$-nek az $e(x;\, x_1,\, x_2)$ húrja is. Valóban, ha $x_1 \leq x \leq x_2$, akkor

$$e(x;\, x_1,\, x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \leq$$
$$\leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} e(x_1;\, y_1,\, y_2) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} e(x_2;\, y_1,\, y_2) = e(x;\, y_1,\, y_2).$$

Ennek speciális eseteként kapjuk, hogy ha $0 \leq y_1 < x_1 \leq \dfrac{v}{2}$, akkor

$$g(y_1) = f(y_1) + f(y_2) = 2e\left(\frac{v}{2};\, y_1,\, y_2\right) \geq 2e\left(\frac{v}{2};\, x_1,\, x_2\right) = f(x_1) + f(x_2) = g(x_1),$$

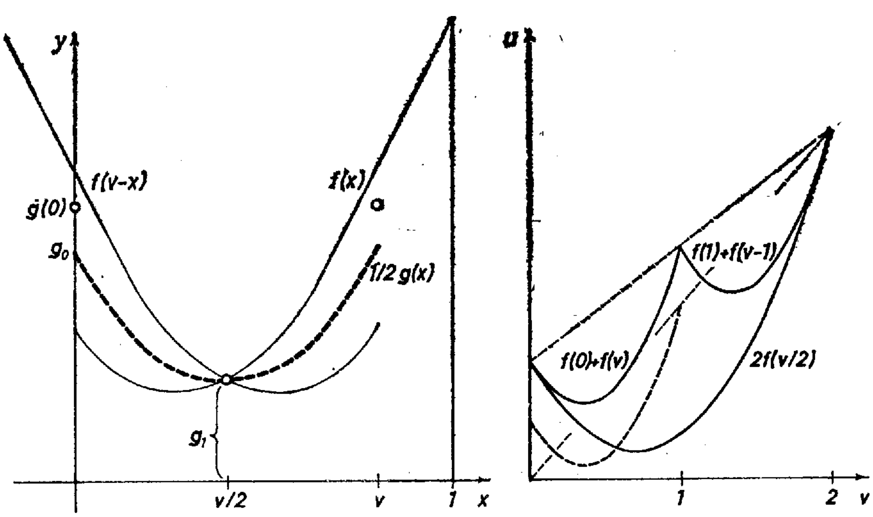
ahol $y_2 = v - y_1$, $x_2 = v - x_1$. Tehát g valóban monoton fogyó a $\left[0, \dfrac{v}{2}\right]$ szakaszon.

A g függvény – mint minden konvex függvény – folytonos az értelmezési tartományának minden belső pontjában. Legyen ugyanis $f(x)$ a $p \leq x \leq q$ szakaszon konvex, és legyen $p < x_0 < q$. Akkor $p \leq x \leq x_0$, mellett

$$e(x;\, x_0,\, q) \leq f(x) \leq e(x;\, p,\, x_0),$$

ha pedig $x_0 \leq x \leq q$, akkor

$$e(x;\, p,\, x_0) \leq f(x) \leq e(x;\, x_0,\, q).$$



Eszerint

$$\min\{e(x;\, p,\, x_0), e(x;\, x_0,\, q)\} \leq f(x) \leq \max\{e(x;\, p,\, x_0), e(x;\, x_0,\, q)\}.$$

Mivel ennek az egyenlőtlenség láncnak a két szélén folytonos függvények állnak, és ezeknek az $x = x_0$ helyen felvett értéke egyenlő, $f(x)$ is folytonos x_0-ban.

Könnyen látható, hogy ha $f(x)$ konvex $[p,\, q]$-ban, akkor f-nek a p-beli értékét tetszőleges, $f(p)$-nél nagyobb számmal helyettesítve ismét konvex függvényt kapunk. Emiatt a $[p,\, q]$-ban konvex f függvény a végpontokban nem feltétlenül folytonos. Így van ez a fenti g függvény esetében is, ezért nem várható, hogy a $\left[0,\, \dfrac{v}{2}\right]$-ben monoton g függvény értékkészlete az egész $\left[g\left(\dfrac{v}{2}\right),\, g(0)\right]$ szakasz legyen. Mivel g monoton, létezik az $x = 0$ pontban a jobb oldali határértéke, jelöljük ezt g_0-lal. Megmutatjuk, hogy g értékkészlete az

(ii) $$u = g(0) = f(0) + f(v)$$

számból, és a

(iii) $$g_1 \leq u < g_0$$

számokból áll, ahol

$$g_0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[f(x) + f(v-x)\right] \quad \text{és} \quad g_1 = g\left(\frac{v}{2}\right) = 2f\left(\frac{v}{2}\right).$$

(Ha a g_0 határérték egyenlő a g_1 függvényértékkel, akkor g értékkészlete a $g(0)$ és a g_1 számokból áll.)

Ennek érdekében – többek között – azt kell megmutatnunk,

hogy ha u_0 tetszőleges valós szám, melyre $g_1 \le u_0 < g_0$ teljesül, akkor van olyan $0 < x_0 \le \dfrac{v}{2}$ amelyre $g(x_0) = u_0$.

Legyen A azoknak az x valós számoknak a halmaza, amelyekre

$$0 < x \le \frac{v}{2} \quad \text{és} \quad g(x) < u_0$$

teljesül. Mivel g monoton fogy és $g_0 > u_0$, azért az $x = 0$ hely alkalmas környezete A-hoz tartozik, és ha $x \in A$, akkor az egész $(0, x)$ szakasz A-hoz tartozik. Emiatt A maga is egy intervallum, jelöljük x_0-lal A jobb oldali végpontját (x_0 az A-beli számok felső határa: a legkisebb olyan szám, amelynél A egyetlen eleme sem nagyobb). Akkor $0 < x_0 \le \dfrac{v}{2} < v$ miatt g folytonos x_0-ban, tehát x_0-beli értéke egyenlő itteni határértékével. Ez csak u_0 lehet, hiszen A definíciója szerint g-nek x_0-beli bal oldali határértéke legalább u_0, ha pedig $g(x_0) > u_0$ volna, x_0-nak valamely alkalmas környezete teljes egészében A-hoz tartozna. Tehát a balról zárt, jobbról nyílt $[g_1, g_0]$ intervallum (a $g_1 = g_0$ esetben a g_1 pont) g értékkészletéhez tartozik. Nyilván oda tartozik a $g(0)$ érték is, így már csak azt kell belátnunk, hogy más érték nem tartozik g értékkészletéhez. Mivel g monoton, e számokon kívül csak g_0 tartozhatna még g értékkészletéhez. Ha azonban van olyan $0 < x_0 \le \dfrac{v}{2}$, melyre $g(x_0) = g_0$, akkor g monoton és konvex volta miatt $g(x) = g_0$, volna minden $0 < x \le \dfrac{v}{2}$ mellett, tehát g_0 csak akkor tartozhat g értékkészletéhez, ha egyenlő g_1-gyel.

Ezzel beláttuk, hogy ha $0 \le v \le 1$, akkor a keresett $P(u, v)$ pontok azok és csakis azok, amelyeknek első koordinátájára (ii) vagy (iii) teljesül. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $1 \le v \le 2$, akkor az

$$u = g(1) = f(1) + f(v-1)$$

szám és a

$$g_1 \le u < g_2$$

balról zárt, jobbról nyílt szakasz a keresett $P(u, v)$ pontok első koordinátájának a mértani helye, ahol

$$g_2 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left[f(x) + f(v-x)\right].$$

Ezzel a kérdésre megadtuk a választ. A keresett mértani helyet az (i), (ii) és (iii) feltételek írják le.

Megjegyzések. 1. Megkaphatjuk a keresett (v, u) számpárokat úgy is, hogy vesszük a (v, u) síkon az $u = 2f\left(\dfrac{v}{2}\right)$ függvény összes húrjának a felezőpontját – pontosabban: e felezőpontok koordinátáit. Ha f folytonos a $[0, 1]$ szakasz végpontjaiban, akkor a keresett mértani hely a (v, u) síkon a $h_1(v) = 2f\left(\dfrac{v}{2}\right)$ és a

$$h_2(v) = \begin{cases} f(0) + f(v) & \text{ha} \quad 0 \le v \le 1, \\ f(1) + f(v-1) & \text{ha} \quad 1 < v \le 2 \end{cases}$$

függvények képei által határolt idom.

2. Többször használtuk a következő állítást: ha az a_n, sorozat monoton nő és felülről korlátos, akkor konvergens. Legegyszerűbb, ha azt mondjuk, ez a valós számoknak alaptulajdonsága, és ezért nem kell bizonyítanunk. Mint a geometriában, a matematika más területein is axiómákkal, alaptulajdonságokkal definiálhatjuk az alapfogalmakat. Így a valós számokat is úgy definiálhatjuk, hogy felsoroljuk mindazokat a tulajdonságokat, amelyek a valós számokat alapvetően jellemzik. Az alapműveletekkel kapcsolatos tulajdonságokon kívül két tulajdonságot szokás még axiómának tekinteni: az egyik azt biztosítja, hogy beszélhessünk „akármilyen nagy” valós számról, a másik pedig azt, hogy a valós számok összességében „ne legyen lyuk”. Az utóbbi tulajdonságnak az egyik lehetséges változata a megoldásunkban használt állítás.