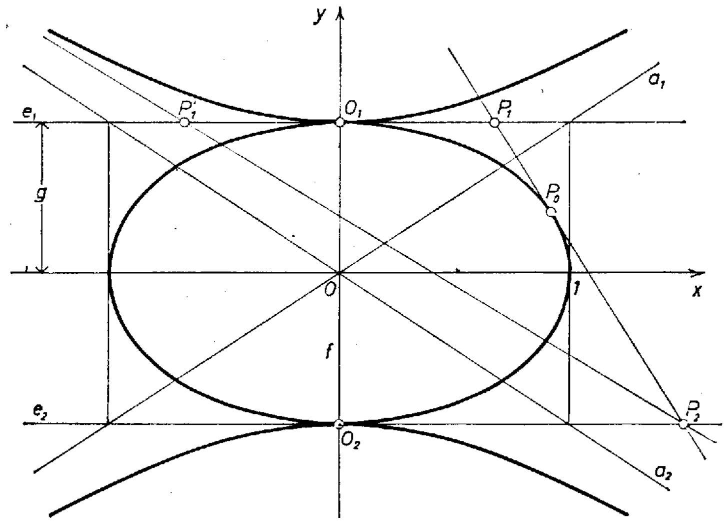
A feladatot a koordináta-geometria eljárásával oldjuk meg. Legyen a két tengely az e_1, e_2 egyenespár közép párhuzamosa, illetőleg az f egyenes, legyen e_1 egyenlete $y = g$ (> 0), ekkor e_2 egyenlete $y = -g$. A koordináta-rendszer használata könnyűvé teszi annak tekintetbevételét, hogy P_1 és P_2 az f-nek ugyanazon az oldalán vannak-e, vagy ellentétes oldalán. Ugyanis O_iP_i-t $(i = 1, 2)$ előjellel ellátva – vagyis helyette P_i abszcisszáját írva –, P_1 és P_2 akkor és csak akkor vannak f ugyanazon (ill. ellentétes) oldalán, ha a két abszcissza szorzata pozitív (ill. ha negatív). Eszerint a feladat két kérdésének elindítását egybe is foglalhatjuk így: $O_1P_1 \cdot O_2P_2 = k$ legyen, ahol az eredeti kérdésben $k = 1$, a kiegészítő kérdésben $k = -1$.



Előre látjuk, hogy ha a sík egy $P(x, y)$ pontján át rajzolható egy megfelelő P_1P_2 egyenes, akkor ennek az egyenesnek minden pontja megfelel P szerepére.

Az is világos, hogy az e_1 és e_2 egyeneseknek – O_1, ill. O_2 kivételével – minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez, mert ha e_1-nek egy O_1-től különböző pontja P, akkor e_2-nek f-től, azaz O_2-től $1/O_1P$ távolságra levő pontjai P-vel együtt megfelelő pontpárt alkotnak, éspedig a P-vel egyező oldalon levő P' az eredeti kérdés szempontjából, az f túlsó oldalán levő pedig a kiegészítő kérdés szempontjából. Maga O_1 viszont nyilvánvalóan nem felelhet meg, sem az O_2 pont.

Mármost az az állítás (föltevés), hogy P hozzátartozik a keresett mértani helyhez, azt jelenti, hogy tartozik hozzá olyan $p(\neq 0)$ szám, amellyel és $P_1(p, g)$ és $P_2(k/p, -g)$ az előírásnak megfelelő pontok, tehát $P(x, y)$ rajta van a P_1P_2 egyenesen, koordinátái kielégítik ennek egyenletét, azaz teljesül

$$-2g(x - p) = \left(\frac{k}{p} - p\right)(y - g), \tag{1}$$

átrendezve

$$(y + g)p^2 - (2gx)p - k(y - g) = 0 \tag{2}$$

Miután fenti megjegyzésünkkel az e_1-beli $P(x, g)$ és e_2-beli $P(x, -g)$ pontokat már megvizsgáltuk a mértani hely szempontjából, elég tekintenünk az $|y| \neq g$ ordinátájú pontokat. Így (1) a p-re mint ismeretlenre vonatkozóan valódi másodfokú egyenlet, és egyik gyöke sem 0. P fent mondott létezését természetesen úgy értjük, hogy a hozzá tartozó p valós, tehát (2) diszkriminánsa nem negatív, azaz teljesül:

$$(2gx)^2 + 4k\left(y^2 - g^2\right) \geqq 0. \tag{3}$$

Innen $4g^2k$-val osztva és kellően rendezve, $k > 0$, azaz $k = 1$ esetében

$$x^2 + \frac{y^2}{g^2} - 1 \geqq 0, \text{ azaz } \frac{y^2}{g^2} \geqq 1 - x^2, \tag{4}$$

$k < 0$, azaz $k = -1$ esetén pedig

$$-x^2 + \frac{y^2}{g^2} - 1 \leqq 0, \text{ azaz } \frac{y^2}{g^2} \leqq 1 + x^2. \tag{5}$$

Ezek szerint az eredeti kérdésben (4), a kiegészítő kérdésben (5) a szükséges feltétele annak, hogy a $P(x, y)$ pont – ahol $|y| \neq g$ – hozzátartozzék a mértani helyhez.

(4)-ben az egyenlőség annak az ellipszisnek a pontjaira teljesül, melynek szimmetriatengelyei azonosak a koordinátatengelyekkel, az x tengelyen fekvő szimmetriatengely fele-hossza 1, a másiknak a fele-hossza g. Az utóbbi tengely végpontjai tehát O_1 és O_2, ezeket már fentebb kizártuk. (Ha $g=1$, akkor körről van szó.) Az egyenlőtlenség jelével pedig az ellipszisre (körre) nézve külső pontok teljesítik (4)-et, amelyekre nézve az ordináta abszolút értéke nagyobb, mint az ugyanazon abszcisszán levő ellipszispont ordinátájának abszolút értéke, ill. $x>1$ esetén minden y.

(5)-ben az egyenlőség annak a hiperbolának a pontjaira teljesül, melynek képzetes tengelye az x tengely, a tengely fele-hossza 1 (a szokásos jelölés szerinti b), valós (a fókuszokat tartalmazó) tengelye az y tengely, az utóbbinak a fele-hossza g (a szokásos jelölés szerinti a), tehát a hiperbola csúcsai O_1 és O_2 (ezeket már kizártuk), fókuszainak ordinátái $\pm\sqrt{g^2+1}$. Az egyenlőtlenség jelével viszont a hiperbolára nézve külső pontok teljesítik (5)-öt, más szóval a két ág közti, az x tengely felé eső pontok, a fókuszokat nem tartalmazó síkrész pontjai. A hiperbola aszimptotái egyszersmind annak a téglalapnak az átló egyenesei, amelynek oldalegyenesei a (4) ellipszishez a tengelyvégpontokban húzott érintők.

Fordítva, ha valamely $P(x,y)$ pontra teljesül (3), és $|y|\neq g$, akkor a (2) egyenletnek van 0-tól különböző valós gyöke, jelöljük ezt p-vel. Erre a p-re teljesül (1) is, ami éppen azt jelenti, hogy a $P_1(p,g)$ és $P(x,y)$ pontokon átmenő egyenes átmegy a $P_2(k/p,-g)$ ponton is, tehát ez az egyenes megfelel a feladat követelményeinek. Ha tehát $|y|\neq g$ úgy (3) a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a P pont a vizsgált mértani helyhez tartozzék.

Meg lehet mutatni, hogy ha P_0 rajta van az ellipszisen, ill. hiperbolán (és $P_0\neq O_1$, O_2), akkor a (2)-ből kapott egyetlen p érték az ellipszis (hiperbola) P_0-beli érintőjét határozza meg; ha pedig P_0 külső pont, akkor a kapott két p érték a kúpszelet P_0-on átmenő két érintőjét adja – természetesen az (1)-be való behelyettesítéssel.

Végül a koordinátarendszertől függetlenül így mondható ki eredményünk. Tekintsük azt az ellipszist, melynek egyik tengelye az O_1O_2 szakasz (ill. azt a hiperbolát, melynek valós tengelye az O_1O_2 szakasz), a másik tengelyének hossza pedig 2 egységnyi hosszú. A keresett mértani helyet mindazok a pontok alkotják, amelyeken át lehet érintőt fektetni az ellipszishez (hiperbolához), kivéve közülük az O_1, O_2 pontokat.