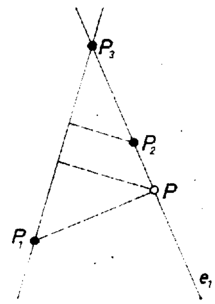
1. Először egy tételt idézünk és bizonyítunk. *Ha adott a síkban n pont ($n \geqq 3$), melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor van olyan egyenes, mely pontosan kettőn megy át az adott pontok közül.*[1] Legyenek az adott pontok $P_1, P_2, \ldots, P_n$.



Tekintsük azokat az egyeneseket, amelyeken legalább kettő van rajta az adott pontok közül,így nyerjük az $e_1, \ldots, e_m$ egyeneseket, $m > 1$. Tekintsük minden egyes P_i távolságát minden egyes olyan e_j-től, mely nem megy át P_i-n. Válasszuk úgy a pontok és az egyenesek indexeit, hogy e távolságok közt ne forduljon elő kisebb, mint P_1 távolsága e_1-től. Azt állítjuk, hogy ekkor e_1-en pontosan kettő van az adott pontok közül.

Jelöljük a P_1-ből e_1-re bocsátott merőleges talppontját P-vel. Ha e_1-en legalább 3 pontunk van, akkor közülük kettő van a P-nek valamelyik oldalán, legyenek ezek P_2 és P_3 úgy, hogy $PP_3 > PP_2$ legyen (P_2 esetleg egybe is eshet P-vel). A $P_1P_2P_3$ háromszögben $P_1P_3 > PP_3 \geqq P_2P_3$, vagyis ebben a háromszögben a P_1P_3-hoz tartozó magasság kisebb a P_2P_3-hoz tartozó magasságnál, P_2 közelebb van a P_1P_3 egyeneshez, mint P_1 az e_1-hez. Ellentmondásra jutottunk, így e_1-en csak kettő lehet az adott pontok közül – annyi viszont van is.

Gallai tételét a következő átfogalmazásban fogjuk felhasználni: *ha adott a síkban $n(\geqq 3)$ különböző pont úgy, hogy bármelyik kettőjük összekötő egyenesén van legalább egy további az adott pontok közül, akkor ez az n pont egyetlen egyenesen helyezkedik el* (hiszen csak így lehetséges, hogy ne legyen olyan összekötő egyenesük, mely pontosan kettőn megy át a pontok közül).

2. Rátérve feladatunkra, csak $n \geqq 5$ esetére kell bizonyítanunk az állítást, hiszen $n = 4$ esetében még nincs mit bizonyítani. Legyenek a pontjaink $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ és Q, és vegyünk egy olyan S síkot, amely nem megy át Q-n és nem párhuzamos a QP_i ($i = 1, 2 \ldots, n-1$) egyenesek egyikével sem. (Létezik ilyen sík, hiszen véges számú egyenesről van szó.) Legyen a QP_i egyenesnek S-sel való metszéspontja Q_i, ez $(n-1)$ db különböző pont, mert egyetlen QP_i egyenes sem megy át valamely másik P_j ponton. Segédtételünk alapján azt mutatjuk meg, hogy a Q_i pontok egyetlen q egyenesen vannak; ebből már következik, hogy mind az n pontunk a (Q, q) síkban van benne.

Vegyük Q-t és még kettőt a további pontjaink közül, mondjuk P_1-et és P_2-t. Az egyértelműen meghatározott QP_1P_2 síkban a föltevés szerint legalább egy további pontunk is van, legyen egy ilyen a P_3. Ekkor Q_1, Q_2, Q_3 egy egyenesen van, a síknak S-sel való metszésvonalán. Ugyanígy bármely Q_i, Q_j, $Q_k$ponthármas egy egyenesen van, ahol $1 \leqq i < j \leqq n-1$ és P_k rajta van a QP_jP_j síkon.

Ezek szerint a különböző pontokból álló Q_i pontrendszer ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) egy síkban van és eleget tesz az átfogalmazott Gallai–tétel föltételeinek, tehát valóban egyetlen q egyenesen helyezkednek el.

Megjegyzés. A föltevés első részéből csak azt használtuk ki, hogy van olyan az adott pontok közt – ti. Q olyan –, amelyen a többiek közül vett semelyik kettőnek az összekötő egyenese nem megy át. Kár lenne azonban a föltétel szépen, egyszerűen kimondott állítását elkomplikálni; az ilyesmi általában sem szokásos.

Ha azonban a föltevés első részét úgy módosítanók, hogy minden pontunkon menne át más kettőnek összekötő egyenese úgy, hogy pontjaink 2 egyenesre lennének felfűzve, mindegyik egyenesre legalább 3 pont, és e 2 egyenes kitérő lenne egymáshoz képest, akkor az állítás már nem lenne igaz.

Érkezett 15 dolgozat, de egyik sem megoldása a problémának.

Jutalmul 100–100 Ft értékű könyvutalványt kapott pontversenyen kívül: Bálint László, Balogh Zoltán, Reviczky János és Stachó Balázs.

---

[1] Gallai Tibor tétele, lásd következő cikkünkben: *Erdős Pál:* Néhány elemi geometriai problémáról, K.M.L. 24 (1962) 193–201.