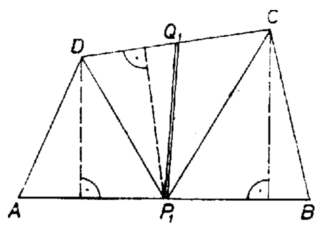
A földtevés azt jelenti, hogy minden olyan PQ pontpárra, amelyre

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \lambda(> 0), \tag{1}$$

teljesül a következő is:

$$(APQD) = (BPQC) = \frac{1}{2}\,(ABCD), \tag{2}$$

egy konvex sokszög területét úgy jelölve, hogy zárójelben felsoroljuk csúcsait, valamelyik körüljárása sorrendjében. Megmutatjuk, hogy ebből a $\lambda = 1$ speciális érték mellett azt kapjuk, hogy CD párhuzamos AB-vel.



1. ábra

Valóban $\lambda = 1$ esetén P felezi AB-t és Q felezi CD-t (az 1. ábrán P_1, ill. Q_1), tehát

$$(AP_1Q_1D) = (BP_1Q_1C). \tag{2'}$$

Másrészt teljesül

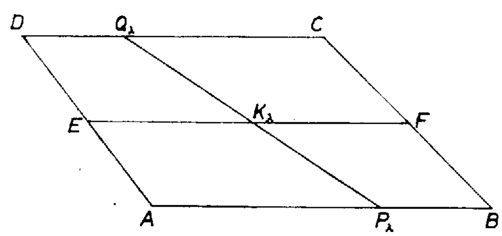
$$(P_1Q_1D) = (P_1Q_1C) \tag{3}$$

is, mert Q_1D és Q_1C alapjuk egyenlő és P_1-ből húzott magasságuk azonos. (3)-at (2′)-ből kivonva:

$$(AP_1D) = (BP_1C).$$

Ámde e két háromszög AP_1, ill. BP_1 alapja egyenlő, így magasságuk, azaz D-nek és C-nek az AB egyenestől való távolsága is egyenlő. És mivel az $ABCD$ négyszög konvex, C és D ugyanazon az oldalán vannak AB-nek, tehát CD párhuzamos AB-vel, amint állítottuk. Más szóval: $ABCD$ trapéz.

Legyen most P_λ, Q_λ az (1)-nek egy tetszőleges $\lambda(\neq 1)$ pozitív értékkel eleget tevő pontpár (2. ábra).



2. ábra

Így $P_\lambda B = \dfrac{1}{1+\lambda}\,AB$, $P_\lambda A = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\,AB$, $Q_\lambda D = \dfrac{1}{1+\lambda}\,CD$, $Q_\lambda C = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\,CD$.
$AP_\lambda Q_\lambda D$ és $BP_\lambda Q_\lambda C$ közös magasságú és (2) szerint egyenlő területű trapézok, tehát egyenlők az EK_λ, $K_\lambda F$ középvonalaik is, ahol E, F az AD, ill. BC szár felezőpontja és K_λ az EF, $P_\lambda Q_\lambda$ egyenesek metszéspontja. Így

$$EK_\lambda - K_\lambda F = \frac{1}{2(1+\lambda)}\,(\lambda AB + CD) - \frac{1}{2(1+\lambda)}\,(AB + \lambda CD) = \frac{\lambda - 1}{2(1+\lambda)}(AB - CD) = 0,$$

és ez tetszőleges $\lambda\,(\neq 1)$ arányérték mellett csak úgy teljesülhet, ha $AB = CD$, vagyis az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Ha viszont $AB = CD$, akkor minden λ arányérték mellett $EK_\lambda = K_\lambda F$, tehát $P_\lambda Q_\lambda$ minden λ mellett felezi a négyszög területét. Ezt kellett bizonyítanunk.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. A feladat feltételéből csak annyit használtunk fel, hogy a $P_\lambda Q_\lambda$ egyenes felezi a négyszög területét $\lambda = 1$, és valamilyen, 1-től különböző, de különben tetszőleges λ érték mellett.