a) Az integrálszámítás egyik nevezetes egyenlőtlensége szerint ha az f_1, f_2 függvényeknek a négyzete is integrálható, akkor

$$\left(\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right)^2 \leqq \int_a^b f_1^2(x)dx \int_a^b f_2^2(x)dx \tag{3}$$

(Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség). Ugyanis azf_1,f_2 alapján értelmezett

$$I(\lambda) = \int_a^b \big[f_1(x) + \lambda f_2(x)\big]^2 dx = \int_a^b f_1^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx + \lambda^2 \int_a^b f_2^2(x)dx$$

függvény értéke minden λ mellett nem negatív. Mivel $I(\lambda)$ λ másodfokú függvénye, ez csak úgy lehet, ha a diszkriminánς negatív vagy 0, ami épp a (3) egyenlőtlenséget jelenti. Alkalmazzuk (3)-at az $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = 1$ függvényekre, kapjuk, hogy

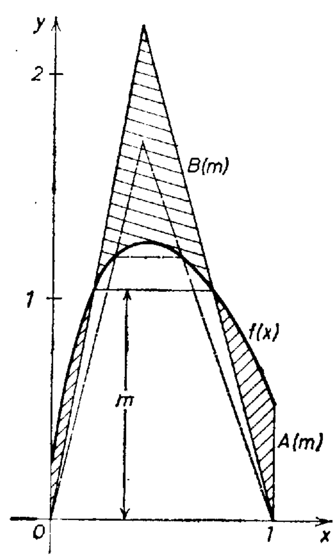
$$\int_0^1 f^2(x)dx \geqq \int_0^1 f(x)dx = 1,$$

tehát (2) legkisebb lehetséges értéke 1, ami el is érhető (még az (1) megszorítás mellett is) az $f(x) = 1$ választással (és csak ezzel).

b) Feltevésünk szerint $f(x)$ alulról konkáv, azaz felülről konvex. Mivel $f(x) \geqq 0$, ez az utóbbi azt jelenti, hogy a koordinátasíknak az x tengely és az $f(x)$ képe által közrefogott F része konvex halmaz. Tekintsük ennek a halmaznak a vízszintes húrjait, és rendeljük hozzá mindegyikhez azt a háromszöget, amelyiknek az alapja az x tengely 0 és 1 pontjai közötti szakasza, és a szárai átmennek a húr végpontjain. Jelöljük az m magassághoz tartozó húr esetében ezt a háromszöget $H(m)$-mel, F-nek $H(m)$ által le nem fedett részének a területét $A(m)$-mel és $H(m)$-nek F által le nem fedett részét $B(m)$-mel. Mivel F konvex, ha $m_1 < m_2$, $H(m_1)$ tartalmazza $H(m_2)$-t, és $A(m_1) \leqq A(m_2)$, $B(m_1) \geqq B(m_2)$. Az m magasság legnagyobb szóbajöhető értéke egyenlő $f(x)$ maximumával, M-mel. $B(M)$ nyilván 0, és mivel $H(M)$ területe kisebb F területénél, $M \leqq 2$. Az m-re szóbajöhető legkisebb érték az $f(0)$, $f(1)$ számok kisebbike, pontosabban mondva ez az érték már választható m-nek. Itt $A(m)$ határértéke 0, és mint az könnyen látható, az A, B függvények folytonosak. Tehát van olyan m, amelyre

$$A(m) = B(m),$$

és erre az m-re $H(m) = 1$, vagyis $H(m)$ harmadik csúcsa az $y = 2$ egyenesen van. Jelöljük a $H(m)$ két szárából összeálló függvényt f_0-lal. Erre a függvényre



$$\int_0^1 f_0^2(x)dx - \int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 \big[f_o(x) - f(x)\big]\big[f_0(x) +$$
$$f(x)\big]dx \geqq 2m \int_0^1 \big[f_0(x) - f(x)\big]dx \geqq 0,$$

mert

$$\int_0^1 \big[f_0(x) - f(x)\big]\big[f_0(x) + f(x) - 2m\big]dx \geqq 0,$$

hiszen itt az integrandus nem negatív: ahol $f_0 \leqq f$, ott f_0 is, f is kisebb m-nél, tehát a szorzat mindkét tényezője pozitív. Mivel f_0 is alulról konkáv, és az integrálja 1, f_0 is beletartozik azokn ak a függvényeknek a halmazába, amelyekre (2) legnagyobb értékét keressük. Könnyen látható, hogy f_0 négyzetintegrálja $4/3$, tehát a vizsgált függvényekre

$$1 \leqq \int_0^1 f^2(x)dx \leqq \frac{4}{3}.$$