Azoknak az x számoknak a T halmazát kell meghatároznunk, amelyeknek megvan az a tulajdonságuk, hogy ha egy hatjegyű A szám osztható x-szel, akkor A családjának minden tagja osztható x-szel. Más szóval ez a tulajdonság azt jelenti, hogy $H(x)$-szel jelölve az x szám hatjegyű többszöröseit, a $H(x)$ halmaznak tetszőleges elemével együtt az illető A elem egész családja is a $H(x)$ halmazhoz tartozik. Ez a követelmény semmitmondó azokra az x számokra, amelyekre $H(x)$ üres, ami pontosan akkor következik be, ha $x \geq 10^6$. A feladatban mondott tulajdonsága, tehát minden legalább 7 jegyű természetes számnak megvan. A továbbiakban a vizsgált T halmaz 10^6-nál kisebb elemeit határozzuk meg, s ezek halmazát T_0-lal jelöljük.

Legyen egy tetszőleges hatjegyű A szám tízes számrendszerbeli alakja
$A = a_6a_5a_4a_3a_2a_1$. Feladatunk szerint

$$A_k = 10^{6-k}C + B,$$

ahol $C = a_ka_{k-1}\dots a_1$, $B = a_6a_5\dots a_{k+1}$, azaz $A_k = a_ka_{k-1}\dots a_1a_6\dots a_{k+1}$.

Az A_k számokat tehát egymásból is előállíthatjuk: A_k-ból úgy kapjuk A_{k+1}-et, hogy A_k utolsó jegyét a többi jegy elé írjuk

$$A_{k+1} = \frac{A_k - a_{k+1}}{10} + 10^5a_{k+1}.$$

Érvényes lesz ez a megállapítás A_1 képzésére is, ha A-t A_0-lal jelöljük. A családnak csak hat tagja van, A_6-ból már nem kapunk új számot: A_7 azonos A_0-lal.

Legyen x a T_0, és A a $H(x)$ halmaz tetszőleges eleme, azaz A legyen x-szel osztható hatjegyű szám. Mivel $x \in T_0$, az A_k számok is oszthatók x-szel, és velük együtt x-szel oszthatók a

$$10A_{k+1} - A_k = (10^6 - 1)a_{k+1} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

számok is. Mivel a_{k+1} az A szám tetszőleges számjegye, és A a $H(x)$ tetszőleges eleme, eredményünk azt jelenti, hogy x osztója a $(10^6-1)\cdot a$ alakú számok mindegyikének, ahol a a $H(x)$ halmaz tetszőleges elemének tetszőleges számjegye.

Jelöljük $h(x)$-szel a $H(x)$-beli számok számjegyeinek legnagyobb közös osztóját, előbbi megállapításaink szerint ha $x \in T_0$, akkor $(10^6 - 1)\,h(x)$ osztható x-szel (hiszen a $(10^6 - 1)\,a$ számok mindegyike osztható x-szel, ha a befutja $H(x)$ számjegyeit, így e számok legnagyobb közös osztója, $(10^6 - 1)\,h(x)$ is osztható x-szel).

Ha x maga is hatjegyű, akkor $h(x)$ az x számjegyeinek is közös osztója; azaz x számjegyei az

$$x_0 = \frac{x}{h(x)}$$

szám számjegyeinek a $h(x)$-szeresei; és x_0 a $(10^6 - 1)$ szám hatjegyű osztója. Mivel

$$10^6 - 1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37,$$

$10^6 - 1$-nek három hatjegyű osztója van:

$$K = \frac{10^6-1}{9} = 111\,111,$$
$$L = \frac{10^6-1}{7} = 142\,857,$$
$$M = \frac{10^6-1}{3} = 333\,333.$$

Az x_0 szám ezek valamelyike lehet, és x_0 számjegyeiből úgy kapjuk meg x számjegyeit, hogy mindegyiket megszorozzuk egy alkalmas h számmal. Így kapjuk K-ből a

$$K_h = hK = 111\,111h \qquad (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9)$$

számokat; L-hez viszont csak a $h = 1$ választás lehetséges, és M-ből nem kapunk új számot. A K_h számoknak triviálisan megvan a vizsgált tulajdonságuk, az L számra ezt – lévén L a $(10^6 - 1)$ osztója – $(10^6 - 1)$ többi osztójával együtt az alábbiakban bizonyítjuk.

Ha $x < 10^5$, akkor x egymást követő többszöröseinek az első jegye vagy megegyezik, vagy 1-gyel különbözik egymástól (hiszen ez a különbség épp az x), tehát $h(x) = 1$, így T_0-nak csak olyan 10^5-nél kisebb eleme lehet, amelyik a $(10^6 - 1)$ szám osztója. Megmutatjuk, hogy $(10^6 - 1)$ minden osztója eleme T_0-nak;

Az A_k számok képzésére vonatkozó korábbi megállapításunk szerint elegendő azt bizonyítanunk, hogy ha x a $(10^6 - 1)$ tetszőleges osztója, és A osztható x-szel, akkor A_1 is osztható x-szel. Valóban,

$$10A_1 - A = (10^6 - 1)a_1$$

miatt (ahol a_1 az A szám utolsó jegye) osztható x-szel a $D = 10A_1 - A$ szám is. Emiatt

$$D + A = 10A_1$$

is osztható x-szel, ámde x és 10 relatív prímek (mint ahogy (10^6-1) és 10 is azok), ez tehát csak úgy lehet, ha A_1 is osztható x-szel.

A vizsgált T halmaz elemei tehát a következők:

– a legalább hétjegyű természetes számok,

– a K_h számok (ezek a csupa egyforma számjeggyel felírt számok),

– a (10^6-1) szám osztói.