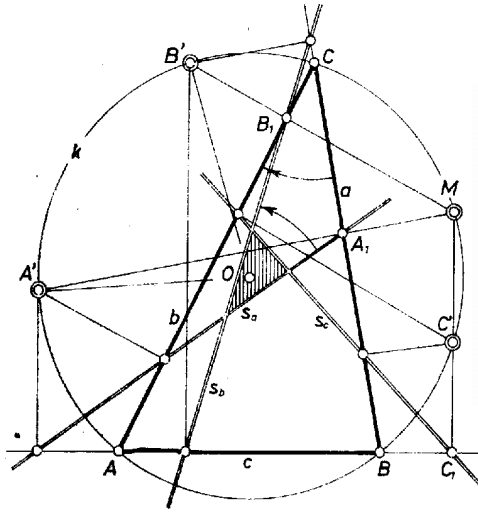
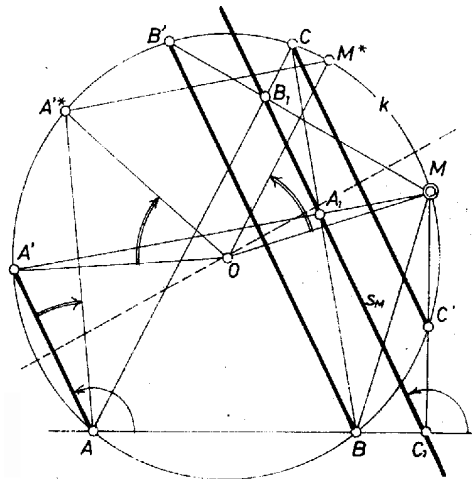


I. megoldás. Az állítást annak megmutatásával bizonyítjuk, hogy a két háromszög megfelelő oldalegyenespárjait egymással egyenlő nagyságú, ellentétes irányú elfordulások viszik át egymásba. Pontosabban: az A' , B' , C' ponthoz megszerkesztett Simson-egyenes rendre s_a -val, s_b -vel, s_c -vel jelölve, az AB , BC , CA egyenes pedig rendre c -vel, a -val, b -vel, az s_a -t s_b -be átvivő elfordulás, valamint az a -t b -be vivő elfordulás egyenlők, de ellentétes irányúak s i. t. (1. ábra).



1. ábra

Évégett megvizsgáljuk, hogyan változik M -nek k -n való elmozdulása hatására a hozzá tartozó s_M Simson-egyenes iránya. Megmutatjuk előkészítésül, hogy az AA' , BB' és CC' egyenesek mindegyike párhuzamos s_M -mel (2. ábra).



2. ábra

Valóban, a k -ban, valamint az MA , MB , MC átmérők fölötti Thalész-körökben keletkezett húrnégyszögek alapján

$$\begin{aligned} BAA' \sphericalangle &= 180^\circ - BMA_1 \sphericalangle = 180^\circ - BC_1A_1 \sphericalangle, \\ ABB' \sphericalangle &= AMB_1 \sphericalangle = AC_1B_1 \sphericalangle, \quad ACC' \sphericalangle = AMC_1 \sphericalangle = AB_1C_1 \sphericalangle, \end{aligned}$$

és ezek igazolják utóbbi állításunkat. (Az A , B , C és M pontok kölcsönös helyzete szerint e bizonyítás csekély – nem lényeges – módosulásokat mutathat; ha pedig pl. A' egybeesik A -val, akkor az AA' egyenes helyett k -nak A -beli érintője értendő.)

Forduljon el mármost az OM sugár OM^* -ba. Ekkor A' -nek új, A'^* helyzetét az M^* -on át MA' -vel párhuzamos egyenes metszi ki, így MM^* és $A'A'^*$ egyenlő és ellentétes irányú ívei a k -nak, és az M^* -hoz tartozó Simson-egyenes AA'^* iránya s_M -éhez képest

$$A'AA'^* \sphericalangle = \frac{1}{2} A'OA'^* \sphericalangle = -\frac{1}{2} MOM^* \sphericalangle$$

-gel van elfordulva, ahol a mínusz jel arra utal, hogy az elfordulás iránya ellen-tétes az OM -et OM^* -ba átvivő elfordulás irányával.

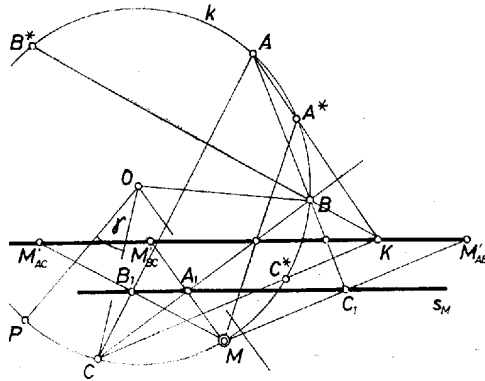
M szerepére A' -t, M^* szerepére B' -t helyettesítve, ennek alapján azt kapjuk, hogy s_b az s_a -hoz képest $(-1/2) A'OB' \sphericalangle$ -gel van elfordulva (1. ábra). Ez pedig egyenlő a $(+1/2) AOB$ forgásszöggel, hiszen az előbbieket szerint az $A'B'C'$

háromszög úgy áll elő ABC -ből, hogy ezt tükrözzük k -nak s_M -re merőleges átmérőjére mint tengelyre. Végül az már nyilvánvaló, hogy $(1/2) AOB \sphericalangle = -BCA \sphericalangle$, és ez az a -t b -be vivő elfordulás negatívja.

A betűzés kellő megváltoztatásával meggondolásunk az $(s_b, s_c) \sphericalangle = -(b, c) \sphericalangle$ egyenlőséget adja; ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyezzük végül: előfordulhat, hogy az A', B', C' pontokhoz tartozó Simson-egyenesek nem alkotnak háromszöget, mindhárom egy ponton megy át. Ilyen helyzet adódik, ha a kiindulási A, B, M, C pontok egy húrdeltoid csúcsai és AM a szimmetriatengely.

II. megoldás. 1. Ismeretes, hogy az ABC háromszög K magasságpontjának a BC, CA, AB egyenesekre vonatkozó A^*, B^*, C^* tükörképe rajta van az ABC köré írható k körön, tehát az A^*M, B^*M, C^*M egyeneseknek a BC, CA, AB egyenesekre vonatkozó tükörképe átmegy K -n (3. ábra). Ha belátjuk, hogy ezeknek a tükörképeknek az állása megegyezik, kapjuk, hogy M -nek a BC, CA, AB egyenesekre vonatkozó tükörképei: $M'_{BC}, M'_{CA}, M'_{AB}$ egy egyenesen vannak. Mivel a tükörképeket az M centrumú, $1/2$ arányú hasonlóság M -nek az ABC oldalaira eső vetületeibe viszi, ezzel egyrészt bebizonyítjuk a Simson-egyenes létezését, másrészt meghatározzuk ennek az egyenesnek az állását.



3. ábra

2. Válasszuk a k kör O középpontját origónak, és k valamelyik OP sugarát alapul véve jellemezzük k pontjait a forgásszöggel, amekkora forgatás OP -t az illető ponthoz tartozó sugárba viszi; a sík egyenesének az állását pedig jellemezzük k valamelyik velük párhuzamos sugarának a forgásszögével. – Jelöljük az A, B, C, M pontokhoz tartozó forgásszögeket α -val, β -val, γ -val és μ -vel. A BOC szög felezőjének az állása jellemezhető az $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ forgásszöggel, a rá merőleges BC egyenes állása pedig az $\frac{1}{2}(\beta + \gamma + \pi)$ forgásszöggel. Ha α^* -gal jelöljük az A^* ponthoz tartozó forgásszöveget, az AA^* egyenes állása $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^* + \pi)$, és mivel ez merőleges BC -re, azért az $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*$ forgásszögekre

$$\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^* + \pi) - \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \pi) = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$$

teljesül, ahol k alkalmas egész szám. Az α^* forgásszög alkalmas megválasztásával elérhető, hogy $k = 0$, azaz

$$\alpha^* = \beta + \gamma - \alpha + \pi$$

legyen.

3. Mivel az A^*M egyenes állása $\frac{1}{2}(\alpha^* + \mu + \pi)$, ezt az egyenest a BC -re tükrözve, a képének az állása azzal az ω -val jellemezhető, amelyre ω és $\frac{1}{2}(\alpha^* + \mu + \pi)$ számtani közepe egyenlő $\frac{1}{2}(\beta + \gamma + \pi)$ -vel, azaz amelyre

$$\omega = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \mu}{2}.$$

Ez az α, β, γ változók szimmetrikus függvénye, tehát ez jellemzi a B^*M egyenes AC -re vonatkozó és a C^*M egyenes AB -re vonatkozó tükörképének az állását is (amint azt bizonyítani akartuk), és egyben ez határozza meg az M -hez tartozó s_M Simson-egyenes állását is.

4. Ha az α^* -ra fent kapott eredményben α helyére μ -t írunk, megkapjuk az A' pont α' forgásszögét:

$$\alpha' = \beta + \gamma - \mu + \pi.$$

Ha pedig az ω -ra kapott eredményben μ helyére ezt az α' -t írjuk, kapjuk az A' -höz tartozó Simson egyenes állását:

$$\omega_A = \frac{\alpha + \mu - \pi}{2}.$$

Ennek és a BC egyenes állását jellemző forgásszögnek a számtani közepe a

$$\varrho = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \mu}{4},$$

ha tehát BC -t egy ϱ állású egyenesre tükrözzük, az A' -höz tartozó Simson-egyenessel párhuzamos egyenest kapunk.

Mivel ϱ az α, β, γ változók szimmetrikus függvénye, ha a CA és AB egyeneseket a ϱ állású egyenesre tükrözzük, akkor a B' -höz, illetve C' -höz tartozó Simson-egyenessel párhuzamos egyenest kapunk. Ezt kellett bizonyítanunk.