a) A parabolához a $P(t,\, t^2+1)$ pontban fektetett érintő egyenlete

$$y-(t^2+1)=2t(x-t),$$

eszerint az érintő az x tengelyt az

$$x=\frac{t^2-1}{2t}$$

abszcisszájú Q pontban metszi. ($t=0$ kizárható, mert a $(0;\,1)$-beli érintő nem metszi az x tengelyt, nem jön szóba P_i-ként.) Eszerint a feladat a $(P_1,\, P_2,\, \ldots,\, P_n)$ pont-n-es abszcisszáiból álló T $(t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n)$ szám–n-esre azt követeli, hogy $i=1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$ mellett teljesüljön

(1) $$t_{i+1}=\frac{t_i^2-1}{2t_i},$$

és az innen $i=n$ mellett adódó t_{n+1} egyenlő legyen t_1-gyel.

Megoldásunk alapja az a (szerencsés) észrevétel, hogy ha α_i olyan szög, melyre $\operatorname{ctg}\,\alpha_i=t_i$, akkor

$$t_{i+1}=\frac{\operatorname{ctg}^2\,\alpha_i-1}{2\operatorname{ctg}\,\alpha_i}=\operatorname{ctg}\,2\alpha_i,$$

továbbá az, hogy minden valós t_1 számhoz egyértelműen található olyan α_1, melyre $0<\alpha_1<\pi$ és $\operatorname{ctg}\,\alpha_1=t_1$. Ekkor a t_i számok előállíthatók α_1 felhasználásával:

$$t_i=\operatorname{ctg}\,2^{i-1}\alpha_1,$$

és a $t_{n+1}=t_1$ követelmény így alakul:

$$\operatorname{ctg}\,2^n\alpha_1=\operatorname{ctg}\,\alpha_1.$$

Eszerint $2^n\alpha_1$ és α_1 különbsége a π-nek egész számú többszöröse:

$$(2^n-1)\alpha_1=k\pi, \qquad \alpha_1=k\cdot\frac{\pi}{2^n-1},$$

ahol, tekintettel a $0<\alpha_1<\pi$ előírásra

$$0<k<2^n-1.$$

Mindezek szerint minden, a feladat követelményeinek eleget tevő P_i, Q_i pont-n-es egy

$$t_1=\operatorname{ctg}\,\frac{k\pi}{2^n-1} \quad (k=1,\, 2,\, \ldots,\, 2^n-2)$$

kezdőértékű és az (1) rekurzióból számított T szám–n-eshez tartozik hozzá, és megfelelő pont–n-est csak ilyen szám–n-es ad.

A megfelelő pont–n-esek száma természetesen kisebb, mint 2^n-2, hiszen minden pont–n-est legalább 2 különböző pontja alapján kapunk meg, nem lehet tehát $P_{i+1}\equiv P_i$, tehát $Q_{i+1}\equiv Q_i$ sem; viszont – mint az 1660. feladatban[1] láttuk – $n=2$ esetén már van megoldása feladatunknak [és az minden $n=2m$ (páros szám) esetén megfelel].

b) $n=6$ esetén – mint könnyen látható – a

$$k=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 31$$

értékek 6 egymástól különböző pontból álló rendszereket adnak; a

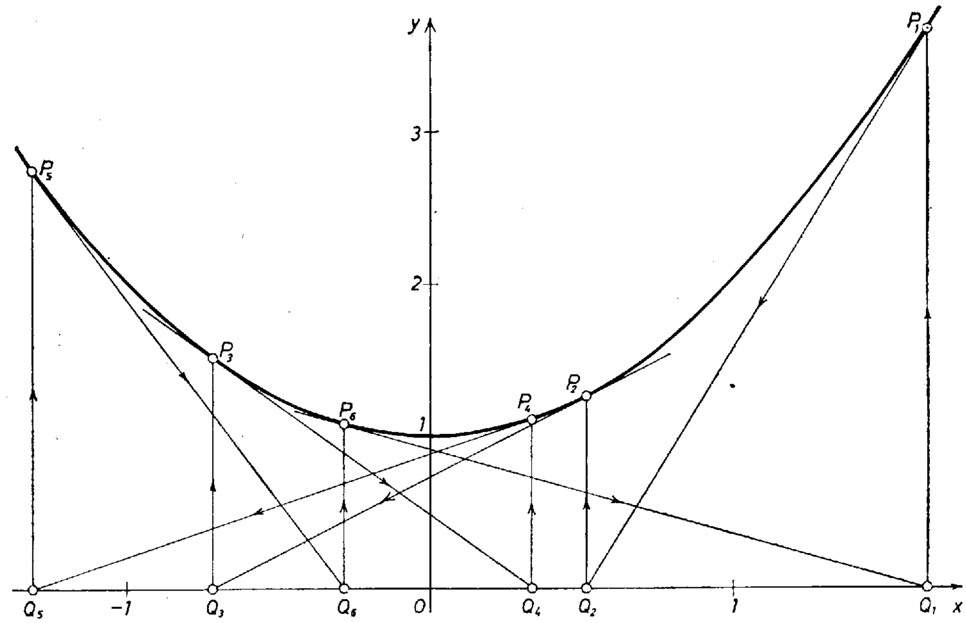
$$k=21$$

érték mellett $P_3\equiv P_5\equiv P_1$ és $P_4\equiv P_6\equiv P_2$ (ez az 1660. feladat megoldása, $21/(2^6-1)=1/3$); végül a

$$k=9, \quad 27$$

értékek mellett pedig P_1, P_2, P_3 különböző egymástól, $P_4\equiv P_1$, és innen kezdve a pontok ismétlődnek. Eszerint a különböző pont–6-osok száma 12. (Felfogás dolga, hogy az utóbbi két típusú pontrendszert elfogadjuk vagy kizárjuk. A feladat nem zárta ki, hogy ugyanaz a pont többször szerepelhessen a rendszerben.) Az ábra a $k=11$ mellett adódó pontrendszert mutatja be, x-tengely menti nyújtással

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 39. (1969) 128.



y
3
2
1
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
Q_5
-1
Q_3
Q_6
O
Q_4
Q_2
1
Q_1
x