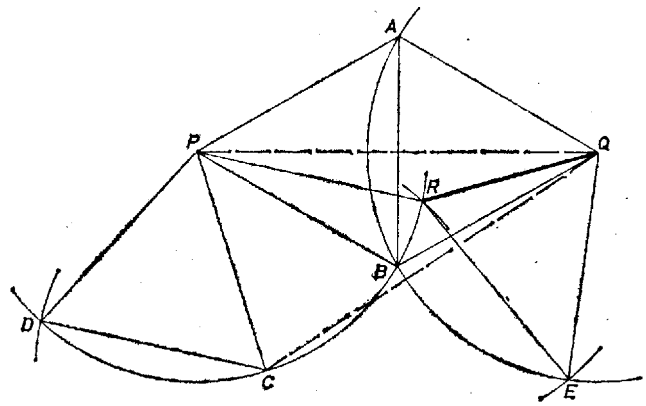
A tetszőleges P pont $f(P)$ képét röviden P'-vel jelöljük.

a) Megmutatjuk, hogy ha $PQ=\sqrt{3}$, akkor $P'Q'=\sqrt{3}$. Legyenek a P körüli, egységsugarú k körnek és a Q középpontú, egységsugarú körnek a metszéspontjai A és B (1. ábra), ekkor az AP, AQ, BP, BQ és AB szakaszok hossza egységnyi, e szakaszok képeinek a hossza is egységnyi.



Az ábrán a P és Q betűk felcserélendők.

1. ábra

Eszerint $A'B'P'$ és $A'B'Q'$ egységoldalú szabályos háromszögek, tehát Q' vagy azonos P'-vel vagy tőle $\sqrt{3}$ távolságra van. Eddig tehát azt láttuk be, hogy ha két tetszőleges pont távolsága $\sqrt{3}$, akkor képeik távolsága vagy 0 vagy $\sqrt{3}$.

Legyen C a P körüli, $\sqrt{3}$ sugarú kör, és a Q körüli, egységsugarú kör egyik metszéspontja. Így a $P'C'$ szakasz hossza vagy 0 vagy $\sqrt{3}$, másrészt $Q'C'=1$. Ha Q' azonos volna P'-vel, akkor a $P'C'$ szakasz hosszának egyrészt 1-gyel, másrészt 0-val vagy $\sqrt{3}$-mal kellene egyenlőnek lennie, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Így csak $P'Q'=\sqrt{3}$ lehet. Ezt akartuk bizonyítani.

b) Hasonlóan láthatjuk be, hogy ha egy leképezés megtartja az a távolságot (azaz ha $PQ=a$-ból következik $P'Q'=a$), akkor az $\sqrt{3}$ távolságot is megtartja. A mi leképezésünk megtartja a $\sqrt{3}$ távolságot, tehát megtartja a $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$ távolságot is, és általában a $(\sqrt{3})^k$ távolságokat minden természetes k kitevő mellett.

Megmutatjuk, hogy leképezésünk minden természetes n számra megtartja az n távolságot. Már tudjuk, hogy ez igaz, ha $n=3^k$. Válasszuk a k kitevőt úgy, hogy $n<3^k=m$ legyen, és tegyük fel, hogy $PQ=n$. Mérjük fel a PQ félegyenesre az egységnyi szakaszt m-szer, kapjuk a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontokat (köztük P_n azonos Q-val). A $P'P_1'$, $P'P_2'$, $\ldots$, $P_{m-1}'P_m'$ szakaszok hossza egységnyi, és $P'P_m'=m$, ez csak úgy lehet, ha a P', P_1', $\ldots$, P_m' egy egyenes egymást követő pontjai. Tehát a $P_n'=Q'$ pont P'-től n távolságra van, amint azt bizonyítani akartuk. Általában, ha egy leképezés megtartja az a távolságot, akkor megtartja az na távolságot is, ha n természetes szám.

Szükségünk van azonban annak megmutatására is, hogy leképezésünk az 1-nél kisebb távolságokat is megtartja. Ezt bizonyítjuk be a következő lépésben.

c) Térjünk vissza az 1. ábra pontjaihoz, és legyen R a PC egyenes Q-t tartalmazó oldalán az a pont, amelyre $CR=QR=1$. Könnyen látható, hogy

$$\lambda=PR=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}<1.$$

Eddig beláttuk, hogy az A', B', C', P', Q' pontokból álló alakzat egybevágó az $ABCPQ$ alakzattal. Megmutatjuk, hogy R' azonos az $A'B'C'P'Q'$ alakzat R-nek megfelelő R^* pontjával. Mivel $Q'R'=C'R'=1$, azért R' vagy R^*-gal, vagy R^*-nak a $Q'C'$ egyenesre vonatkozó D^* tükörképével azonos. Viszont

$$P'D^*=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}>2,$$

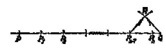
így elegendő megmutatni, hogy $P'R'\leqq 2$. Legyen E olyan pont, melyre $PE=ER=1$. Akkor $P'R'\leqq P'E'+E'R'=2$, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

A leképezés ezek szerint a λ távolságot is megtartja, és általában megtartja az $n\lambda^k$ távolságot is, ahol n és k természetes számok.

d) Legyen $PQ=d$ tetszőleges valós szám. Feltehetjük, hogy $d>0$, hiszen a leképezés egyértelmű volta miatt $P\equiv Q$ esetén $P'\equiv Q'$. Tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan k, hogy $\lambda^k<\varepsilon$ válasszuk meg n-et úgy, hogy

$$n\lambda^k\leqq d<(n+1)\lambda^k$$

legyen. Mérjük fel a PQ félegyenesre a λ^k szakaszt n-szer, kapjuk a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat, és legyen R olyan pont, melyre $P_{n-1}R=RQ=\lambda^k$ (2. ábra).



2. ábra

Akkor $P'R' \leqq P'P'_1 + P'_1P'_2 + \ldots + P'_{n-2}P'_{n-1} + P'_{n-1}R' + R'Q' = (n+1)\lambda^k < d + \varepsilon$.

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $P'R' < d + \varepsilon$, ami csak úgy lehet, ha $P'R' \leqq d$. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges XY szakaszra $X'Y' \leqq XY$. Alkalmazzuk ezt a P_nQ szakaszra, kapjuk, hogy

$$P'Q' \geqq P'P'_n - P'_nQ' \geqq PP_n - P_nQ \geqq n\lambda^k - \varepsilon > d - 2\varepsilon.$$

Tehát $P'Q' \geqq PQ$ is igaz, így $P'Q' = PQ$, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.