1. A parabola belsején a parabola vonalával kettévágott síknak azt a részét értjük, amelyikben a fókusz van és ehhez hozzáértjük magának a vonalnak a pontjait is. Így a beírandó ellipszisvonalnak lehet közös pontja az adott parabolákkal. Ha ezt kizárnánk, – akkor mint könnyen belátható – nem is lenne legnagyobb területű a beírt ellipszisek közt.

Koordinátákkal jellemezve a két parabola belsejének közös részét – amit gyümölcsmagra emlékeztető alakja alapján M-mel jelölünk – azok az $(x,\ y)$ pontok alkotják, amelyekre (p-t természetesen pozitívnak véve) teljesül

$$x^2 - p^2 \le 2py \le p^2 - x^2. \tag{3}$$

Ez az $(x,\ y)$-nal egyidejűen teljesül a $(-x,\ y)$, a $(-x,\ -y)$ és az $(x,\ -y)$ pontra is, tehát M-et önmagába viszi át az x és y tengelyre való tükrözés és az origóra mint centrumra való tükrözés is.

2. Megmutatjuk, hogy M konvex idom, vagyis bármely két belső vagy kerületi pontját összekötő szakasz is benne van M-ben. Legyenek $P_0(x_0,\ y_0)$ és $P_1(x_1,\ y_1)$ a (3)-at teljesítő egymástól különböző pontok, ekkor, amíg $0 \le \lambda \le 1$, addig az

$$x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, \qquad y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1$$

koordinátájú P_λ pont végigfut a P_0P_1 szakaszon és teljesíti (3)-at. Ugyanis egyrészt

$$2py_\lambda = (1-\lambda)\cdot 2py_0 + \lambda\cdot 2py_1 \le (1-\lambda)(p^2 - x_0^2) + \lambda(p^2 - x_1^2) =$$
$$= p^2 - \{(1-\lambda)x_0^2 + \lambda x_1^2\} \le p^2 - \{(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\}^2 = p^2 - x_\lambda^2,$$

hiszen

$$(1-\lambda)x_0^2 = (1-\lambda)^2x_0^2 + \lambda(1-\lambda)x_0^2,$$
$$\lambda\cdot x_1^2 = \lambda^2x_1^2 + \lambda(1-\lambda)x_1^2 \text{ és}$$
$$x_0^2 + x_1^2 \le 2x_0x_1.$$

Másrészt lényegében ugyanígy bizonyítható,hogy

$$x_\lambda^2 - p^2 \le 2py_\lambda.$$

Megmutatjuk még az M-ből az I. síknegyedbe eső M_1 résznek egy felhasználandó tulajdonságát is. Ennek pontjaira (3) jobb oldala szerint

$$x^2 + y^2 \le p^2 - 2py + y^2 = (p-y)^2,$$

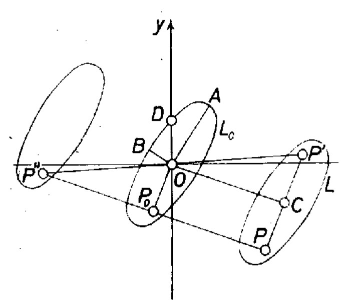
azaz $r = \sqrt{x^2+y^2}$ jelöléssel

$$r + y \le p \tag{3a}$$

És ha a pontot az O origó körül ráfordítjuk az x tengely pozitív felére, r változatlan marad, y lecsökken 0-ra, tehát (3a) teljesül, a pont benne marad M_1-ben.

3. Az eddigiek alapján belátjuk, hogy ha egy L ellipszis benne van M-ben, akkor benne van az a vele egybevágó L_1 ellipszis is, amelynek nagytengelye az x tengelyen van és kistengelye az y tengelyen. Erre támaszkodva elég lesz az L_1-gyel megegyező tengelyállású ellipszisek közül az M-be beírt legnagyobb területűt meghatároznunk.

Első lépésül azt látjuk be, hogy L-lel együtt az az origó középpontú L_0 ellipszis is az M-ben van, amely L-ből a $\overrightarrow{CO}$ eltolással áll elő, ahol C az L középpontja. Legyen L egy tetszőleges pontja P (a belsejében vagy a kerületén), ennek C-re való tükörképe P', és P'-nek O-ra való tükörképe P'' (1. ábra).



1. ábra

Mivel L centrálszimmetrikus, azért P' is az L-nek pontja és vele együtt M-nek is. Így pedig P'' is az M-nek pontja, hiszen M is centrálszimmetrikus. A két tükrözés összetételeként P'' előáll a P-ből transzlációval, melynek vektora

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{2CP'} + \overrightarrow{2P'O} = 2\overrightarrow{CO}.$$

Ezért M konvex volta miatt a PP'' szakasz P_0 felezőpontja is benne van M-ben, másrészt P_0 előáll a P-ből a $\overrightarrow{CO}$-ral való eltolással is. Ezt P helyén az L minden pontjára alkalmazva azt kaptuk, hogy a mondott L_0 valóban benne van M-ben.

Föltehetjük, hogy L_0 nagytengelye az első és harmadik síknegyedben van vagy ezek határán, hiszen ha nem így van, akkor ez az x tengelyre vett tükörképére áll fenn, és az is M-ben van. Jelöljük L_0 nagytengelyének első negyedbeli végpontját A-val, kistengelye második negyedbeli végpontját B-vel, a rövidebbik AB ellipszisívnek az y tengelyen levő pontját D-vel és forgassuk L_0-t a negatív forgásirányban addig, míg A az x tengelyre ér. Eközben az AOD szögtartománybeli rész M_1 ben marad, a DOB szögtartománybeli rész pedig belejut az OD sugarú körnek egy cikkébe, amely szintén M_1-ben van, hiszen $OB \leq OD \leq OA$. Tehát az AOB negyedellipszis elforgatottja M_1-ben lesz, L_0 elforgatottja pedig – a fent mondott L_1 – az M-ben, ezt akartuk bizonyítani.

4. Eszerint ellipszisünk egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad |y|=\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}, \qquad a \geq b > 0 \tag{4}$$

alakú, és benne az a, b féltengelyhosszakat úgy kell meghatároznunk, hogy egyrészt ne legyen M-en kívüli pontja, azaz (3) és (4) alapján

$$|x| \leq a \leq p \qquad \text{és} \qquad \sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}} \leq \frac{p}{2}-\frac{x^2}{2p}, \tag{5}$$

– speciálisan $x=0$ esetén $b \leq p/2$ –, másrészt területe, ami közismerten $t = ab\pi$, maximális legyen, vagyis az ab szorzat legyen maximális.

Ekvivalens átalakításokkal (5)-ből

$$\left(\frac{p}{2}-\frac{x^2}{2p}\right)^2+\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2=\left(\frac{p}{2}-\frac{x^2}{2p}-\frac{pb^2}{a^2}\right)^2+b^2\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{p^2b^2}{a^4}-1\right) \geq 0, \tag{6}$$

és az első háromtagú így írható:

$$\frac{p}{2}\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right)-\frac{x^2}{2p}. \tag{7}$$

Egyelőre csak az olyan ellipsziseket tekintjük, amelyekben $2b^2 \leq a^2$, ezekben (7) eltűnik, ha

$$|x| = p\sqrt{1-\frac{2b^2}{a^2}}, \quad (< p) \tag{8}$$

így (6) teljesüléséhez szükséges, de elegendő is, hogy a második háromtagúban

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{p^2b^2}{a^4}-1 \geq 0$$

legyen, azaz csak olyan b-k jönnek szóba, amelyekre (rögzített a mellett)

$$b \leq \frac{a}{p}\sqrt{p^2-a^2}, \quad ab \leq \frac{a^2}{p}\sqrt{p^2-a^2} \quad \left(\text{és } b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right). \tag{9}$$

Így az a-tól függő

$$\frac{t}{\pi}=\frac{a^2}{p}\sqrt{p^2-a^2}$$

függvény maximumát kell keresnünk, ami nyilván ugyanott van, mint a következő függvényé:

$$\frac{p^2}{4\pi^2}\cdot t^2=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2}(p^2-a^2).$$

Itt a három tényező összege p^2, állandó, tudjuk viszont, hogy állandó összegű pozitív számok szorzata akkor és csak akkor maximális, ha a tényezők egyenlők. Ebből, majd (9) alapján itt csak a következő ellipszisről lehet szó:

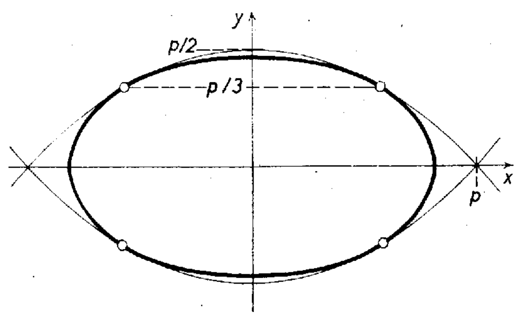
$$a=\sqrt{\frac{2}{3}}p(=0{,}816p), \qquad b=\frac{\sqrt{2}}{3}p\left(=\frac{a}{\sqrt{3}}=0{,}471p\right), \tag{10}$$

$$t = ab\pi = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}p^2(=1{,}209p^2).$$

5. Hátra van még a $2b^2 > a^2,\ a < \sqrt{2}b$, tengelyarányú ellipszisek esete. Ezekben $b \leq \frac{p}{2}$ alapján

$$a \leq \frac{p}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad ab\pi \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}p^2 < \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}p^2,$$

azaz kisebb a fönt elért értéknél. Mindezek szerint a keresett ellipszis méreteit (10) adja, amely (8) szerint az $|x| = \frac{p}{\sqrt{3}}$ abszcisszájú pontokban érinti M határát (2. ábra).



2. ábra

Egyenlete $x^2 + 3y^2 = 2p^2/3$.

Megjegyzés. A 3. pont eredménye alapján vázolunk egy másik elindulást is. Nézzük meg, mit jelent az $a,\ b$ tengelypárra, hogy (4) benne van M-ben. (3) jobb oldali egyenlőtlensége céljára (4) pontjaira

$$x^2 + 2py = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + 2py = a^2 + \frac{p^2b^2}{a^2} - \left(\frac{pb}{a} - \frac{ay}{b}\right)^2, \tag{11}$$

tehát (4) biztosan M belsejében van, ha

$$a^2 + \frac{p^2b^2}{a^2} \leq p^2. \tag{12}$$

Ha van (4)-nek olyan pontja, amelynek ordinátájára

$$\frac{pb}{a} - \frac{ay}{b} = 0, \qquad \text{azaz} \qquad y = \frac{b^2}{a^2}p,$$

akkor (12) szükséges feltétele is annak, hogy (4) az M-beli legyen. Ilyen y akkor van, ha

$$\frac{b^2}{a^2}p \leq b, \qquad \text{azaz} \qquad pb \leq a^2.$$

Ha viszont nincs ilyen y, azaz ha $pb > a^2$, akkor, mivel az ellipszis minden pontjára (11)-ben

$$\frac{pb}{a} - \frac{ay}{b} \geq \frac{pb}{a} - a > 0,$$

ezt helyettesítve (11)-be

$$x^2 + 2py \leq 2pb,$$

és ez nem nagyobb p^2-nél, ha

$$b \leq p/2, \tag{12}$$

ami triviálisan szükséges feltétele annak, hogy (4) az M-ben legyen.

Ha tehát valamely b-re teljesül (12), akkor (4) eleve M-beli minden olyan a mellett, melyre $pb > a^2$, vagyis amelynek a tengelyei „nem túl nagyok”. A $\sqrt{pb}$-nél nagyobb a értékekre pedig (12) a szükséges és elégséges feltétel. Ennek alkalmas továbbalakításából olvasható ki a fenti (10) eredmény.

Jutalmul 100–100 Ft-os könyvutalványt kapott pontversenyen kívül: Bara Tamás, Bartolits István, Császár Gyula, Kiss Emil, Kollár János, Kópházi József, Lelkes András, Oláh Vera és Pallagi Dezső.