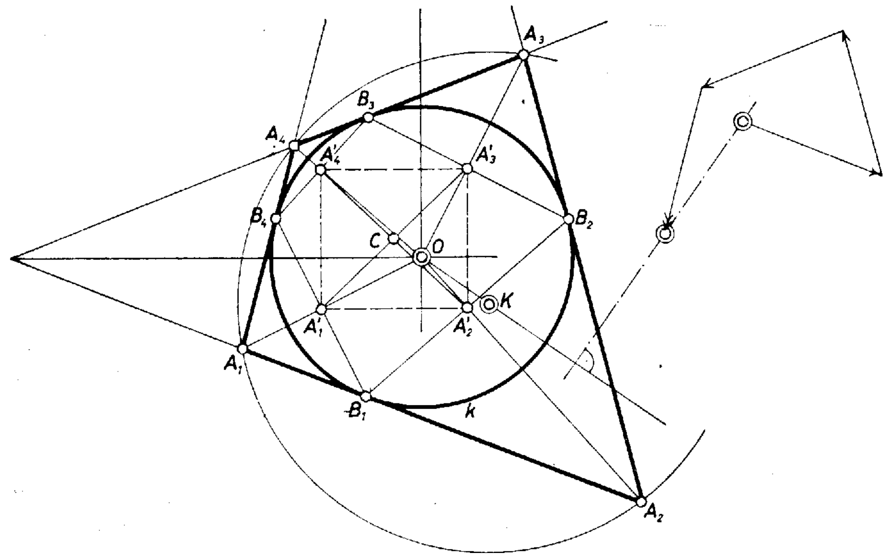
I. megoldás. Jelöljük a bicentrikus négyszög csúcsait A_1-gyel, A_2-vel, A_3-mal, A_4-gyel, a köréje és a beléje írt körök középpontját K-val, ill. O-val, a beírt kört k-val, k érintési pontjait az A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 oldalakon rendre B_1-gyel, B_2-vel, B_3-mal, B_4-gyel, és az $\overrightarrow{OB_1}$ vektorokat $\mathbf{b}_i$-vel $(i = 1,2,3,4)$. Ha a $\mathbf{b}_i$ vektorokat $(+90°)$-kal elforgatjuk, a pozitívkörüljárású négyszög oldalaival párhuzamos, egyenlő hosszúságú vektorokat kapunk, elegendő tehát megmutatni, hogy a $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4$ vektor párhuzamos az $\overrightarrow{OK}$ vektorral.



Invertáljuk a négyszög köré írt kört k-ra, így az A_i csúcsok k-ra vonatkozó A_i' inverzén átmenő kört kapunk. Ismeretes, hogy az inverzió alapkörén kívül lévő pont inverzét megkapjuk, ha belőle érintőket húzunk az alapkörhöz, és vesszük az érintési pontok közti szakasz felezőpontját. Eszerint az A_1', A_2', A_3', A_4' pontok rendre a B_4B_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 szakaszok felezőpontjai, az $A_1'A_2'A_3'A_4'$ négyszög a $B_1B_2B_3B_4$ négyszög középnégyszöge (azaz csúcsai $B_1B_2B_3B_4$-nek oldalfelező pontjai). Tehát az $A_1'A_2'A_3'A_4'$ négyszög paralelogramma, másrészt csúcsai egy körön, k inverzén vannak.

Ez csak úgy lehet, ha ez a négyszög téglalap, és ekkor a köréje írható kör C középpontja a négyszög centruma, vagyis

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1'} + \overrightarrow{OA_2'} + \overrightarrow{OA_3'} + \overrightarrow{OA_4'}\right) = \frac{1}{4}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4).$$

Ha tehát a $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4$ összeg $\mathbf{0}$ vektor, akkor C azonos O-val, és így K is azonos O-val. Ha pedig ez az összeg nem $\mathbf{0}$, akkor C és O különböző pontok és az $\overrightarrow{OC}$ vektor párhuzamos $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$-gyel. Ismeretes, hogy egy kör és inverzének középpontja az inverzió centrumán átmenő egyenest határoz meg, tehát az O, C, K pontok egy egyenesen vannak, és OK is párhuzamos $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$-gyel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. **1.** Feladatunk állításán túlmenően azt is bebizonyítottuk, hogy a $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$ összeg akkor és csak akkor $\mathbf{0}$, ha O és K azonosak.

2. A megoldásból az is kiolvasható, hogy $A_1A_2A_3A_4$ akkor és csakis akkor bicentrikus négyszög, ha a $B_1B_2B_3B_4$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

II. megoldás. A vektorok skaláris szorzatát felhasználva megmutatjuk, hogy feladatunk állítása minden bicentrikus sokszögre érvényes. Legyenek a sokszög csúcsai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (és állapodjunk meg abban, hogy A_{n+1} is az A_1 csúcsot jelöli), a sokszög köré és a beléje írt körök középpontja legyen K és O. Jelöljük az A_i, O pontokhoz a K centrumból húzott helyvektorokat rendre $\mathbf{a}_i$-vel és $\mathbf{p}$-vel, az A_iA_{i+1} oldalvektorral megegyező egyirányú egységvektort $\mathbf{e}_i$-vel $(i = 1,2,\ldots,n)$. Feladatunk állítása ekvivalens azzal, hogy a

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_n)$$

skaláris szorzat értéke 0, ezt fogjuk bizonyítani.

Az A_i csúcshoz tartozó belső szögfelező irányát a $(\mathbf{p} - \mathbf{a}_i)$ vektor, az A_i-beli külső szögfelező irányát az $(\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i)$ vektor adja meg $(i = 1,2,\ldots,n$; és $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_n)$ emiatt

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}_i)(\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i) = 0. \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Adjuk össze ezeket az egyenleteket, kapjuk, hogy

$$\mathbf{2p}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i(\mathbf{e}_{iu-1} + \mathbf{e}_i).$$

A jobb oldalon álló összeg egyenlő a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1})$$

összeggel (ahol $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_1$), ennek viszont minden tagja 0, hiszen $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_{i+1})$ az A_iA_{i+1} szakasz felezőpontja, és $KA_i = KA_{i+1}$ miatt ennek a felezőpontnak a helyvektora merőleges az A_iA_{i+1} oldalra. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Kópházi József (Tatabánya, Árpád Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A most bizonyított állítás $n = 3$ melletti speciális esete ekvivalens a P.51. probléma állításával, a fenti bizonyítás az erre adott II. megoldás általánosítása (K. M. L. 41. kötet 70. old.).