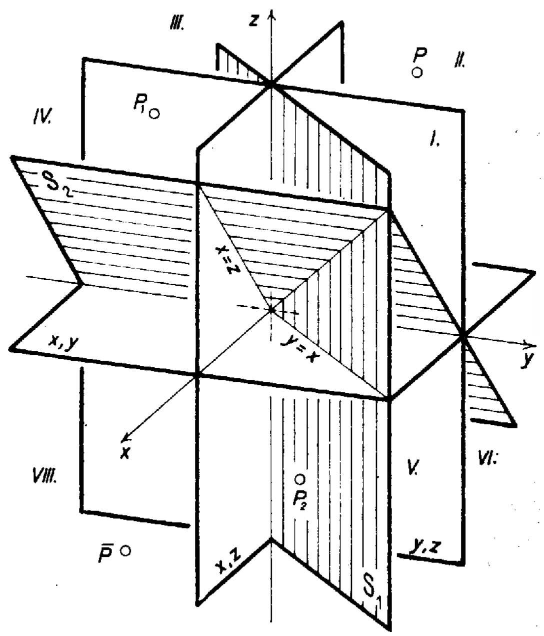
1. A test felvágásához használandó koordinátatengely-síkok éppen azok a határok, amelyeken átlépve egyik-egyik koordináta előjele megváltozik, és ez kihatással van az abszolút érték függvény képzési módjára. Így az x, y tengelyek által kifeszített, $z = 0$ egyenletű tengelysík egyik oldalán (a z tengelyt szokásosan függőlegesen fölfelé irányítva a felső oldalán) $z > 0$, a másik (az alsó) oldalán $z < 0$. Az y, z, valamint a z, x tengelyek alkotta tengelysík hasonlóan az x, ill. y koordináta előjele szerint vágja két-két részre a teret, és e 3 sík együttvéve a következő 8 térnyolcadot alakítja ki (1. ábra):



1. ábra

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & \\
\text{II.} & \\
\text{III.} & \\
\text{IV.} &
\end{array}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} x>0, \\ x<0, \end{array}\right\} y>0, \\
\left.\begin{array}{l} x<0, \\ x>0, \end{array}\right\} y<0,
\end{array}\right\} z>0;
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{V.} & \\
\text{VI.} & \\
\text{VII.} & \\
\text{VIII.} &
\end{array}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} x>0, \\ x<0, \end{array}\right\} y>0, \\
\left.\begin{array}{l} x<0, \\ x>0, \end{array}\right\} y<0,
\end{array}\right\} z<0.
$$

Jelöljük a vizsgálandó K testnek az egymás utáni térnyolcadokba eső részét rendre K_{I}-gyel, K_{II}-vel, …, K_{VIII}-cal.

2. Az O origóra való tükrözés a $P(x,\, y,\, z)$ koordinátákkal bíró pontot a $\overline{P}$ $(-x,\, -y,\, -z)$ pontba viszi át (magát O-t pedig önmagába). Ebben a két pontban (1) bal oldalának az értéke egyenlő, így $\overline{P}$ akkor és csak akkor van benne a K-ban vagy van a K határán, ha P benne van K-ban vagy a határán. Eszerint az O-ra való tükrözés K-t mint egészet önmagába viszi át, a vizsgálandó részeit pedig páronként egymásba, tehát a

$$K_{\mathrm{I}} \text{ és } K_{\mathrm{VII}}, \qquad K_{\mathrm{II}} \text{ és } K_{\mathrm{VIII}}, \qquad K_{\mathrm{III}} \text{ és } K_{\mathrm{V}}, \qquad K_{\mathrm{IV}} \text{ és } K_{\mathrm{VI}}$$

párok mindegyikében a két rész egybevágó egymással.

Ahogyan a megszokott x, y síkban az $y = x$ egyenletű egyenesre – az I. és III. síknegyedek szögfelező egyenesére – való tükrözés az (x, y) és (y, x) pontokat egymásba viszi át, hasonlóan a z tengely és az x, y sík $y = x$ egyenletű egyenese által meghatározott S_1 síkra tükrözve a teret, a $P(x, y, z)$ és P_1 (y, x, z) pontok egymásba mennek át. (Ez a sík felezi az I., a III., az V. és a VII. sorszámú térnyolcadokat.) Mivel (1) bal oldalának értéke P_1-ben ugyanannyi, mint P-ben, azért az S_1-en való tükrözés is önmagába viszi át K-t, a K_{II}, K_{IV}, valamint K_{VI}, K_{VIII} rész-párokat pedig egymásba, tehát a mondott részek páronként egybevágók. (Ezt sejteti az is, hogy a mondott részeket tartalmazó térnyolcadokban x és y egymással ellentétes előjelűek, és pl. a II.-ban x olyan jelű, mint a IV.-ben az y s i. t. K-nak páratlan indexű részeit pedig önmagukba viszi át a most tekintett tükrözés.) Az eddigiek szerint K_{II}, K_{IV}, és K_{VI}, K_{VIII} egybevágók.

Végül egybevágók velük a föntebbi K_{III}, K_{V} pár tagjai is, vagyis K_{I}, és K_{VII} kivételével mind a 6 része K-nak. Ugyanis az x, z sík $x = z$ egyenletű egyenese és az y tengely által meghatározott S_2, síkra tükrözve a teret, valamint megvizsgálva (1) bal oldalán az x, z csere következményét, hasonlóan kapjuk, hogy K_{II} egybevágó K_{V}-vel és K_{III} a K_{VIII}-cal.

Ezzel a feladat első állítását bebizonyítottuk. (Ehhez az egyes részek alakjáról nem használtunk fel semmit.)

3. Mivel K_{II}-ben $x < 0,\ y > 0,\ z > 0,$ ezért itt $|x| = -x,\ |y| = y,\ |z| = z$. Ezeket (1) bal oldalába helyettesítve, és alkalmazva a tetszőleges valós a, b számpárra érvényes

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy $K_{\rm II}$, pontjaira teljesül egyrészt

$$2 \geq -x + |y+z| + |x+y+z| \geq -x+y+z+x+y+z = 2(y+z),$$

másrészt $|a| = |-a|$ alapján a következő is:

$$2 \geq |-x| + y + z + |-x-y-z| \geq -x+y+z-x-y-z = -2x = 2|x|.$$

Tehát $K_{\rm II}$ pontjaira a II. egyenlőtlenségrendszeren kívül az

(2) $$|x| \leq 1, \qquad y+z \leq 1$$

egyenlőtlenségek is teljesülnek.

Viszont II. és (2) maga után vonja (1)-et, hiszen (1) bal oldalának az értékére, ha $x+y+z \geq 0$, fennáll

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z| = -x+y+z+x+y+z = 2(y+z) \leq 2,$$

ha pedig $x+y+z < 0$, akkor

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z| = -x+y+z-x-y-z = -2x \leq 2.$$

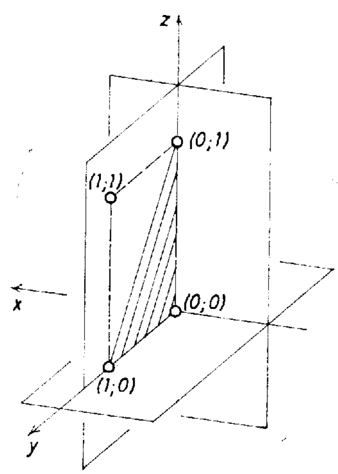
Ezek szerint $K_{\rm II}$ pontjainak y és z koordinátáira

$$y > 0, \;\; z > 0, \;\; y+z \leq 1$$

teljesül: ezek az y, z síknak a (0, 0), (1, 0), (0, 1) pontjai által meghatározott háromszögét jelölik ki. Ezt a háromszöget úgyis megkapjuk, ha a

(3) $$0 < y \leq 1, \quad 0 < z \leq 1$$

négyzetet az $y+z=1$ egyenessel kettévágjuk (2. ábra).

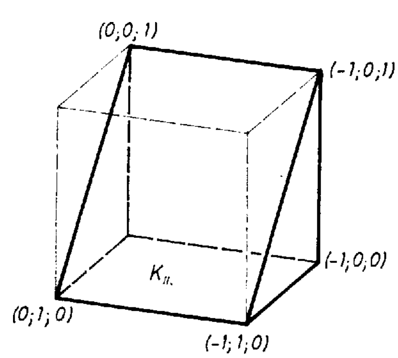


2. ábra

Másrészt $K_{\rm II}$ pontjainak első koordinátáira

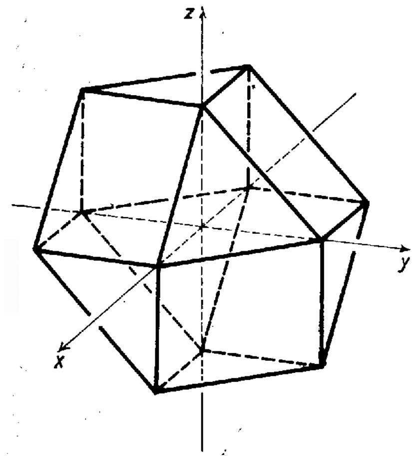
$$0 < -x \leq 1$$

teljesül: ez (3)-mal együtt egy kockát határoz meg a térben, $K_{\rm II}$-t ebből a kockából úgy kaphatjuk meg, ha a kockát kettévágjuk az y, z sík $y+z=1$ egyenesén átmenő és az x tengellyel párhuzamos síkkal (3. ábra).



3. ábra

Ezzel feladatunk második állítását is bebizonyítottuk. A K testről összképet mutat a 4. ábra.



4. ábra

Füredi Zoltán