I. megoldás. Szükségünk lesz a következő egyenlőtlenségre: ha x tetszőleges pozitív valós szám, akkor

$$10^x \geq 1 + x. \tag{1}$$

Ezt három lépésben bizonyítjuk be.

a) Ha $x = 1/n$, ahol n természetes szám, akkor (1) ekvivalens az

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 10 \tag{2}$$

egyenlőtlenséggel. Itt a bal oldal értékére a binomiális tétel, továbbá az $\binom{n}{j} \leq \frac{n^j}{j!}$ egyenlőtlenség szerint

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}. \tag{3}$$

Mivel $j! \geq 2^{j-1}$, a jobb oldal értéke tovább növelhető:

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + 2 = 3.$$

Ebből pedig ($3 < 10$ miatt) következik (2).

b) Ha $x = k/n$, ahol k is természetes szám, akkor (2) alapján

$$10^{\frac{k}{n}} = \left(10^{\frac{1}{n}}\right)^k \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k,$$

és a binomiális tétel szerint a jobb oldal értéke nem kisebb, mint $1 + k/n$, tehát (1)-et $x = k/n$-re is bizonyítottuk.

c) Ha pedig x tetszőleges pozitív valós szám, akkor 10^x értékét a kétoldali megközelítéssel szokás definiálni a felsőbb matematikában, azt mondván, hogy 10^x az az egyetlen valós szám, amelyre $k/n < x$ mellett $10^{k/n} < 10^x$, viszont $k/n > x$ mellett $10^{k/n} > 10^x$ teljesül. Mivel racionális x-re b) alatt már bizonyítottuk (1)-et, ebből a definícióból következik (1) minden valós x-re.

Rátérünk feladatunk állításának az igazolására. (1) szerint tetszőleges pozitív valós számra

$$x \geq \lg(1 + x).$$

Emiatt

$$\frac{a_k}{s_{k-1}} \geq \lg\left(1 + \frac{a_k}{s_{k-1}}\right) = \lg \frac{s_k}{s_{k-1}},$$

ezt a $k = 1, 2, \ldots, n$ értékekre alkalmazva és a kapott egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy

$$S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \lg \frac{s_k}{s_{k-1}} = \lg \prod_{k=1}^{n} \frac{s_k}{s_{k-1}} = \lg \frac{s_n}{s_0}.$$

Feltevésünk szerint s_n tart ∞-be, ha $n \to \infty$, így $\frac{s_n}{s_0}$ és $\lg \frac{s_n}{s_0}$ is tart ∞-be, mert a $\lg x$ ∞-ben vett határértéke $+\infty$. Feladatunk állítását ezzel igazoltuk.

Megjegyzés. Megoldásunkban tetszőleges alapú logaritmust használhattunk volna, ekkor (1) helyett az

$$a^x \geq c(1 + x) \tag{4}$$

egyenlőtlenséget kellett volna bizonyítanunk, ahol x pozitív, a az 1-nél nagyobb valós szám, c pedig alkalmasan választott konstans. Megoldásunkból kiderül, hogy a $c = 1$ konstanshoz 10-nél kisebb (például $a = 3$) értéket is választhatunk a-nak. Be lehetne bizonyítani, hogy a (2) bal oldalán álló sorozatnak $n \to \infty$ mellett a (3) jobb oldalán álló szám a határértéke (ezt a számot e-vel jelölik, és értéke két tizedesre lekerekítve 2,71), és ha a helyére ezt a számot írjuk, akkor (4) érvényes $c = 1$ mellett minden valós x-re.

II. megoldás. Az $f(x) = 1/x$ függvény $s_0 > 0$ és $s_n > s_0$ közti integráljának az $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n$ felosztáshoz tartozó felső közelítő összege éppen a feladatban szereplő S_n, emiatt

$$S_n > \int_{s_0}^{s_n} \frac{dx}{x}.$$

Elegendő tehát megmutatni, hogy tetszőleges pozitív a számra az

$$L(x) = \int\limits_a^x \frac{dt}{t}$$

függvényhatárértéke a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. Mivel az $f(x) = 1/x$ függvény $x \geq a > 0$ mellett folytonos, az $L(x)$-et definiáló integrál létezik, és mivel $f(x) > 0$, $L(x)$ monoton nő. Emiatt elegendő például az $L(2^n a)$ sorozatról belátni, hogy $n \to \infty$ mellett $(+\infty)$-be tart.

Helyettesítéssel való integrálással könnyen belátható, hogy

$$\int\limits_u^v \frac{dt}{t} = \int\limits_{2u}^{2v} \frac{dt}{t}$$

(ha u, v pozitív számok), így

$$L(2^n a) = \sum_{j=1}^{n} \int_{2^{j-1}a}^{2^j a} \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{n} \int_a^{2a} \frac{dt}{t} = n \int_a^{2a} \frac{dt}{t}.$$

Mivel $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{dt}{t}$ pozitív, ebből valóban következik, hogy $L(2^n a)|$ tart $(+\infty)$-be, ha $n \to \infty$, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a megoldásban definiált $L(x)$ függvény egyenlő ${}^e\log(x/a)$-val, ahol e az I. megoldást követő megjegyzésben definiált szám. Az e alapú logaritmust természetes logaritmusnak nevezik, és $\log x$-szel, vagy $\ln x$-szel jelölik.