Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy a feladat kérdésére igenlő válasz adható. Ha $k=2$, két szomszédos négyzetes szám például a 8 és a 9. Tegyük fel, hogy valamilyen k természetes számhoz már találtunk k szomszédos négyzetes számot, legyen ezek között a legkisebb a, és legyen ezeknek a legkisebb közös többszöröse d. Megmutatjuk, hogy ezek alapján megadható $(k+1)$ szomszédos négyzetes szám is.

Tetszőleges n természetes szám mellett az

$$nd+a, \qquad (nd+a)+1, \quad \ldots \quad (nd+a)+(k-1) \tag{1}$$

számok is négyzetesek. Valóban, feltevésünk szerint d osztható $(a+j)$-vel (ahol $0 \le j \le k-1$), így $(nd+a)+j$ is osztható $(a+j)$-vel, és ugyancsak a feltevésünk szerint $(a+j)$-nek van négyzetszám osztója.

Megmutatjuk, hogy található olyan n, melyre $(nd+a)-1$ is négyzetes, ekkor ez az (1) alatti számokkal együtt már $(k+1)$ szomszédos szám, és mindegyikük négyzetes. Legyen p tetszőleges prímszám, mellyel d nem osztható (p lehet például $(d+1)$ bármelyik törzstényezője), és jelöljük p^2-et röviden q-val, $(a-1)$-et b-vel. Azt állítjuk, hogy a

$$d+b, \quad 2d+b, \quad 3d+b, \quad \ldots, \quad qd+b \tag{2}$$

számok között van q-val osztható. Ha ugyanis ez nem volna így, akkor e számokat q-val osztva mindig az $1, 2, \ldots, q-1$ maradékok valamelyikét kapnánk. Összesen q maradékot kapunk, amennyi a (2) számok száma, a lehetőségek száma pedig csak $(q-1)$, így volna olyan maradék, amelyiket kétszer is megkaptunk. Legyen mondjuk az $id+b$ és a $jd+b$ számokra ugyanaz a maradék, ahol $1 \le i < j \le q$. Ekkor a

$$(jd+b)-(id+b)=(j-i)\,d$$

különbség osztható volna q-val, viszont d még p-vel sem osztható, és $0 < j-i < q$ miatt $(j-i)$ sem osztható q-val. Ellentmondásra jutottunk, tehát a (2) alatti számok között valóban van q-val osztható. Legyen, mondjuk, ez az $(id+b)$ szám, ekkor $n=i$ mellett $(nd+a)-1$ négyzetes, hiszen osztható $q=p^2$-tel. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Biztosan négyzetes az $(nd+a)-1$ szám $n=(a-1)(d+2)$ mellett, hiszen ekkor

$$nd+a-1=(a-1)(d+2)\,d+(a-1)=(a-1)(d+1)^2.$$

2. Hasonlóan bizonyítható, hogy tetszőleges k és n természetes számokhoz található k szomszédos természetes szám, melyek mindegyike osztható egy (1-nél nagyobb) természetes szám n-ik hatványával.