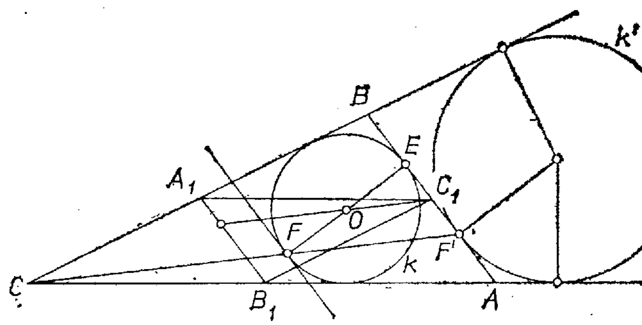
I. megoldás. Jelöljük a $H = ABC$ háromszög beírt körét k-val, középpontját O-val. Azt kell megmutatnunk, hogy a $H_1 = A_1B_1C_1$ háromszög kerületfelező egyenesei átmennek O-n. Nyilván elegendő ezt az egyik kerületfelezőre belátnunk, vagyis elegendő azt bizonyítanunk, hogy a C_1O egyenes felezi a H_1 kerületét (1. ábra).



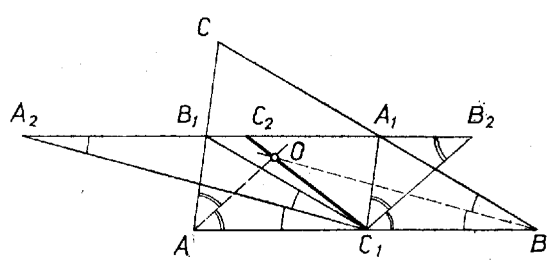
1. ábra

Jelöljük H-nak az AB oldalához hozzáírt külső érintő körét k'-vel, a k, k' körök AB-n levő érintési pontjait E-vel, illetve F'-vel. Mivel egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, a $CA + AF'$ és $CB + BF'$ összegek egyenlők a C-ből k'-höz húzott érintőszakaszok hosszával, és így egymással is egyenlők. A CF' egyenes tehát felezi H kerületét. És mivel H és H_1 centrálisan hasonlók (közös súlypontjukra nézve), azért megfelelő csúcsaikból kiinduló kerületfelező egyeneseik párhuzamosak egymással, elegendő tehát azt bizonyítanunk, hogy $C_1O \parallel CF'$.

A k és k' körök külső közös érintői C-ben metszik egymást, eszerint létezik olyan C centrumú kicsinyítés, amely k'-t k-ba viszi. Vigye ez a kicsinyítés az F' pontot F-be, ekkor k-nak F-beli érintője párhuzamos AB-vel. Emiatt EF a k átmérője és O felezi EF-et. Az AE, BF' szakaszok egyenlők, mert mind a kettő H félkerületének és a BC oldalnak a különbségével egyenlő. Emiatt C_1 felezi az EF' szakaszt. Tehát a CF'-vel azonos FF' egyenest az E centrumból felére kicsinyítve OC_1-et kapjuk, így $OC_1 \parallel FF'$, amint azt bizonyítani akartuk.

Balog János (Budapest, I. István Gimn.)

II. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk be, hogy a C_1O egyenes azonos a H_1 háromszög C_1 csúcsához tartozó kerületfelező egyenesével. Forgassuk rá az A_1B_1 egyenes B_1-en, illetve A_1-en túli meghosszabbítására a B_1C_1, illetve A_1C_1 szakaszt, a kapott végpontokat jelöljük A_2-vel, illetve B_2-vel. Jelöljük az A_2B_2 szakasz felezőpontját C_2-vel, ekkor C_1C_2 nyilván H_1 kerületfelezője. Az $A_2B_1C_1$ háromszög egyenlő szárú, így az A_2-nél, és C_1-nél levő szögei egyenlőek. Az A_2-nél levő szöge viszont egyenlő az AC_1A_2 szöggel is, mert váltószögek. Tehát C_1A_2 felezi az AC_1B_1 szöget és emiatt párhuzamos H-nak B-beli szögfelezőjével, OB-vel. Hasonlóan látható be, hogy C_1B_2 párhuzamon OA-val (2. ábra).



2. ábra

Ezek szerint az ABO és $B_2A_2C_1$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, a háromszögek centrálisan hasonlók, és így párhuzamosak a megfelelő súlyvonalaik is. A C_1O, C_1C_2 súlyvonalaknak C_1 pontjuk közös, ezért ez a két egyenes azonos, és ez épp az, amit bizonyítani akartunk.

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn.)

Megjegyzés. Feladatunk geometriailag jellemzi azt a pontot (a kerületfelező egyenesek metszéspontját), amelynek a P. 76-ban csak a létezését bizonyítottuk be. Összehasonlítva a két probléma megoldását, azt találjuk, hogy a mostaninak a megoldása egyszerűbb, noha benne többet bizonyítunk a létezésnél. Ez azonban nem meglepő: gyakori, hogy egy konkrét tulajdonságot, jellemzést általában könnyebb bizonyítani, mint valaminek a létezését.