1. Szemléletesen szólva az $1, 2, \dots, n$ számoknak csak az olyan permutációit tekintjük, amelyekben minden egyes szám vagy megmarad az alapsorrendbeli helyén, vagy pedig valamelyik szomszédjának a helyét foglalja el. Így a $2, 3, \dots, n-1$ számok részére 3 hely jön szóba, az 1 és n számok részére pedig csak 2 hely.

Jelöljük az (1) tulajdonságú n-elemű permutációk számát p_n-nel. (1) szerint i_n értéke vagy n, vagy $(n-1)$. Az első esetben $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ az $1, 2, \dots, n-1$ számok permutációja, melyre ugyancsak teljesül (1), ezek száma tehát p_{n-1}. A második esetben n-nel csak i_{n-1} lehet egyenlő, tehát $(i_1, i_2, \dots, i_{n-2})$ az első $(n-2)$ természetes szám (1) tulajdonságú permutációja. Ezeknek a száma p_{n-2}, tehát

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}. \tag{2}$$

Természetesen (2)-nek csak $n > 2$ mellett van értelme, így a p_n számok meghatározásához szükségünk van az első két értékre, ami nyilván $p_1 = 1$, $p_2 = 2$. Ezek a kezdő értékek (2)-vel együtt már egyértelműen meghatározzák p_n értékét.

2. A továbbiakban explicit kifejezést keresünk p_n-re.

Általában az olyan sorozatokat, amelyekre teljesül (2), Fibonacci-féle sorozatoknak nevezzük. (2)-ből közvetlenül következik a Fibonacci-sorozatok következő három tulajdonsága:

a) Ha az a_n sorozat Fibonacci-sorozat, akkor ilyen típusú a $c_n = \lambda a_n$, sorozat is, ahol λ tetszőleges valós szám.

b) Ha az a_n, b_n sorozatok Fibonacci-sorozatok, akkor ilyen típusú a $c_n = a_n + b_n$, sorozat is.

c) Az $a_n = q^n$ geometriai sorozat akkor és csakis akkor Fibonacci-sorozat ha q gyöke a

$$q^2 = q + 1$$

egyenletnek, azaz ha

$$\text{vagy} \qquad q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{vagy} \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Elegendő tehát olyan α, β számokat keresnünk, melyekre a $c_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ sorozat első két tagja rendre megegyezik a fenti p_n sorozat első két tagjával, akkor minden n-re teljesül $p_n = c_n$. Ilyen számpár a

$$q_1\alpha + q_2\beta = p_1 = 1 \qquad q_1^2\alpha + q_2^2\beta = p_2 = 2$$

egyenletrendszerből:

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \quad \text{azaz} \quad \frac{q_1}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \quad \text{azaz} - \frac{q_2}{\sqrt{5}},$$

ennélfogva

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}.$$

Ezzel megkaptuk p_n kifejezését kizárólag az n indexszel kifejezve. (Könnyű belátni, hogy a kifejezés bármely n természetes szám esetén természetes számot ad p_n-ként.)