

Jelöljük a keresett számtani sorozat szomszédos tagjainak a különbségét d -vel. Ha d páratlan volna, akkor a sorozat minden második tagja páros volna, és a tagok nem lehetnének prímszámok. (Tagokként természetesen csak egész számokra gondolunk.) Tehát d osztható 2-vel. Ha d nem volna 3-mal osztható, akkor a sorozat három egymás utáni tagja közül az egyik mindig 3-mal osztható volna, tehát d a 3-mal is osztható. Hasonló módon látható be, hogy d osztható 5-tel is, és 7-tel is, vagyis d osztható $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ -zel.

Annak érdekében, hogy lehetőleg kicsi (pozitív) számokkal dolgozzunk, $d = 210$ különbségű sorozatot keresünk. A sorozat a kezdő tagjára szóba jövő prímeket növekvő rendben addig vizsgáljuk, míg olyat találunk, amelyre az $(a + 210i)$ tagok $(0 \leq i \leq 9)$ mindegyike prím. Nyilvánvalóan $a \geq 11$.

Azt várjuk, hogy találunk olyan megoldást, melyben minden tag kisebb 2500-nál, ezért elég azt biztosítanunk, hogy a sorozat további tagjai $(1 \leq i \leq 9)$ ne lehessenek oszthatók a $\sqrt{2500} = 50$ -nél kisebb prímekek egyikével sem. Maga a kezdő tag is csak úgy lehet osztható ilyen prímmel, ha éppen egyenlő vele.

Kisebb számokon vizsgálódhatunk, ha az egymás utáni p értékek esetében a helyett az $(a : p)$ osztás m maradékát tekintjük és ugyanígy d helyett a $(210 : p)$ osztás r maradékát, vagyis $a = \alpha p + m$, $210 = \delta p + r$, ahol α, δ természetes számok, $0 \leq m < p$ és $0 < r < p$. Így a következő 10 számot tekintjük:

$$(1) \quad m, m + r, m + 2r, \dots, m + 9r,$$

hiszen $m + ri = (a + 210i) - (\alpha + \delta i) \cdot p$ akkor és csak akkor osztható p -vel, ha $(a + 210i)$ osztható vele.

Mármost minden egyes fenti p -hez táblázatba gyűjtjük azokat az m értékeket, amelyek mellett (1) egyik tagja sem osztható p -vel. A $11 \leq p \leq 19$ értékekre ezeket az alábbi táblázat tartalmazza. (A $p \geq 23$ esetekben rövidebb felírni a meg nem engedett m értékeket.) – Pl. $p = 11$ esetében $r = 1$, és így $m = 1$ még megfelelő, mert velük (1) az 1, 2, ..., 10 számokból áll, viszont $m \geq 2$ esetén fellépne köztük 11-gyel osztható szám.

| p | r | m lehetséges értékei: | | | | | | | | | |
|-----|-----|-------------------------|----|-----|----|----|-----|----|----|----|----|
| 11 | 1 | 0, | 1; | | | | | | | | |
| 13 | 2 | 0, | 2, | 4, | 6; | | | | | | |
| 17 | 6 | 0, | 6, | 12, | 1, | 7, | 13, | 2, | 8; | | |
| 19 | 1 | 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9; |

| p | r | m nem megengedett értékei: | | | | | | | | | |
|-----|-----|------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 23 | 3 | 20, | 17, | 14, | 11, | 8, | 5, | 2, | 22, | 19; | |
| 29 | 7 | 22, | 15, | 8, | 1, | 23, | 16, | 9, | 2, | 24; | |
| 31 | 24 | 7, | 14, | 21, | 28, | 4, | 11, | 18, | 25, | 1; | |
| 37 | 25 | 12, | 24, | 36, | 11, | 23, | 35, | 10, | 22, | 34; | |
| 41 | 5 | 36, | 31, | 26, | 21, | 16, | 11, | 6, | 1, | 37; | |
| 43 | 38 | 5, | 10, | 15, | 20, | 25, | 30, | 35, | 40, | 42; | |
| 47 | 22 | 25, | 3, | 28, | 6, | 31, | 9, | 34, | 12, | 37. | |

Ezek alapján a sorozat kezdő száma nem lehet 11, mert ez $p = 13$ mellett nem megengedett maradékot ad, nincs meg a 13-as sorban (másképp megvan a 23-asban tilosként). A további keresés jelentősen egyszerűsödik, azt véve alapul, hogy a -t 11-gyel osztva csak 1-et kaphatunk maradékul. Az első ilyen prímszám a 23, de ez is $p = 13$ -ra nem megengedett maradékot ad. Hasonlóan $a = 67, 89$ rendre a $p = 17, 13$ prímekekre nem megengedett maradékot ad, és 45, 111, 133, 155 és 177 nem prím. Az $a = 199$ szám viszont a fenti prímekekre rendre 1, 4, 12, 9, 15, 25, 13, 14, 35, 27, 11 maradékot ad, ezek mindegyike megengedett, és $a = 199$ maga is prím, tehát az $a = 199$ kezdő tagú, $d = 210$ különbségű számtani sorozat első tíz tagja biztosan prímszám.

Megjegyzések. 1. Prím a sorozat elejére beiktatható (-11) is, de efféle problémákban pozitív számokra szokás szorítkozni.

2. Kevesebb megfontolással, felkészüléssel járna a fentiek alapján az $1 + 22k$ sorozat tagjait venni a -nak, ekkor viszont primitív, kilátástalan munkával egyenként kellene vizsgálni, hogy minden tag prím-e a sorozatokban.