

Jelöljük  $D_n$ -nel az  $n$ -nél nem nagyobb természetes számok közül azoknak a halmazát, amelyeknek *van* 1-nél nagyobb közös osztójuk  $n$ -nel, és jelöljük  $d(n)$ -nel a  $D_n$  halmaz elemeinek a számát. Feladatunk állítása azt jelenti, hogy nincs olyan  $n$  természetes szám, melyre  $d(n)$  értéke 10 volna. Ezt fogjuk bizonyítani, és rögtön feltesszük, hogy  $n > 1$ , hiszen  $d(1) = 0$ .

Ha  $n$  prímszám, vagy egy prímszám hatványa, azaz  $n = p^k$ , ahol  $p$  prímszám, és  $k \geq 1$ , akkor

$$D_n = \{p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1} \cdot p\},$$

tehát  $d(n) = p^{k-1}$ , ami ugyancsak prímszámhatvány – vagy 1. Ilyen  $n$ -ekre tehát  $d(n)$  értéke nem lehet 10.

Minden más természetes szám felbontható két egymáshoz prím, 1-nél nagyobb természetes szám szorzatára. Legyen  $n = a \cdot b$  az  $n$ -nek ilyen – de különben tetszőleges – felbontása. Ekkor a

$$D_n(a) = a, 2a, \dots, ba, \quad D_n(b) = b, 2b, \dots, ab$$

halmazoknak egyetlen közös elemük az  $n = ab$  szám, hiszen ha  $ja = lb$ , ahol  $1 \leq j \leq b$ ,  $1 \leq l \leq a$ , akkor  $a$  minden osztója  $l$ -nek is osztója, és  $b$  minden osztója  $j$ -nek is osztója, vagyis csak  $j = b$  és  $l = a$  lehet. A  $D_n(a)$ ,  $D_n(b)$  halmazok egyesítésében tehát  $(a + b - 1)$  szám van, és ezek mind elemei  $D_n$ -nek is. Emiatt

$$d(n) \geq a + b - 1.$$

Itt akkor és csakis akkor lehet az egyenlőség jele érvényes, ha  $a$  is és  $b$  is, prímszám, hiszen  $a$ -nak és  $b$ -nek 1-nél nagyobb, de  $a$ -nál, illetve  $b$ -nél kisebb osztói elemei  $D_n$ -nek, de nincsenek benne a  $D_n(a)$ ,  $D_n(b)$  halmazokban. Ha viszont  $a$  is,  $b$  is prímszámok, akkor  $D_n$  minden eleme vagy  $a$ -val, vagy  $b$ -vel osztható, tehát vagy  $D_n(a)$ -nak, vagy  $D_n(b)$ -nek eleme.

Ha itt  $a$  és  $b$  prímszámok, akkor ezek szerint  $d(n) = 10$  csak akkor lehetne, ha  $a + b = 11$  volna, viszont a 11-et nem lehet két prímszám összegeként előállítani.

Ezek szerint már csak azokat az  $n$  számokat kell vizsgálni, amelyek  $n = a \cdot b$  alakúak, ahol  $a$  és  $b$  relatív prímelek, 1-nél nagyobbak, nem mind a kettő prímszám, és  $a + b < 11$ . Csak két ilyen szám van: a  $3 \cdot 4$  és a  $4 \cdot 5$ , ezekre

$$D_{12} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\},$$

$$D_{20} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\},$$

tehát  $d(12) = 8$ ,  $d(20) = 12$ , így  $d(n)$  értéke ezekre sem 10. Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

*Reviczky János* (Budapest, I. István Gimn.)