Jelöljük a-val az egyenlő nagyságú élek, b-vel pedig a testátló hosszát, ekkor a feladat szerint a harmadik él hossza $(a \pm 1)$. Pitagorasz tétele szerint a és b között a

$$2a^2 + (a \pm 1)^2 = b^2, \tag{1}$$

azaz

$$3a^2 \pm 2a + 1 = b^2$$

összefüggés áll fenn. Alakítsuk a bal oldalt teljes négyzetté:

$$(3a \pm 1)^2 = 3b^2 - 2.$$

Eszerint elég azt biztosítani, hogy a jobb oldal értéke teljes négyzet legyen, azaz

$$3b^2 - 2 = c^2 \tag{2}$$

teljesüljön valamilyen egész c mellett. Mivel ez a c nem lehet 3-mal osztható, azért az

$$a = \frac{c-1}{3} \text{ és az} \tag{3.a}$$

$$a = \frac{c+1}{3} \tag{3.b}$$

számok egyike egész, és ez a (2) alatti b-vel együtt kielégíti (1)-et (természetesen (1)-ben a $\pm$ előjelek közül a megfelelőt véve).

Ha valamely b, c számpárra teljesül (2), akkor b és c páratlan. Ha ugyanis b és c páros, vagy b páros és c páratlan, vagy b páratlan és c páros, akkor $(3b^2 - c^2)$-et 4-gyel osztva rendre 0, 3, 3 maradékot kapunk, tehát $(3b^2 - c^2)$ értéke egyik esetben sem lehet 2. Emiatt az

$$x = \frac{3b-c}{2}, \quad y = \frac{c-b}{2} \tag{4}$$

számok egészek, ha $3b^2 - c^2 = 2$, ezekre a számokra pedig

$$x^2 - 3y^2 = 1 \tag{5}$$

teljesül. Megfordítva, ha x és y tetszőleges egész megoldása (5)-nek, akkor a

$$b = x + y, \qquad c = x + 3y \tag{6}$$

számok egészek, és kielégítik a (2) egyenletet. Elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy az (5) egyenletnek végtelen sok egész megoldása van.

Legyen x_0, y_0 az (5)-nek tetszőleges pozitív egész megoldása, azaz legyen

$$(x_0 - y_0\sqrt{3})(x_0 + y_0\sqrt{3}) = 1.$$

Ekkor nyilvánvalóan

$$(x_0 - y_0\sqrt{3})^2(x_0 + y_0\sqrt{3})^2 = 1.$$

Vagyis kifejtve az

$$x_1 = x_0^2 + 3y_0^2, \qquad y_1 = 2x_0y_0 \tag{7}$$

számok is gyökei (5)-nek. A (7) alatti számok nyilván különböznek az (x_0, y_0) számpártól, mert ha x_0, y_0 pozitív és egész számok, akkor $x_1 > x_0^2 \geq x_0$; $y_1 > y_0$. Elegendő tehát az (5) egyenlet egyetlen pozitív egész gyökét megadni, ebből a (7) alatti transzformációval lépésről lépésre (x_0, y_0 szerepét mindig az újonnan kapott gyökpárnak adva át) végtelen sok gyököt kapunk. Ilyen gyök például az $x = 2$, $y = 1$ számpár, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

Egy-egy megfelelő téglatest élei 2, 2, 1, ill. 6, 6, 7.