a) A g görbét *asztrois*nak nevezik, geometriailag többféleképpen származtatható, itt a következő származtatást vesszük alapul. Legyen a derékszögű koordinátarendszerben P az origó középpontú, egységnyi sugarú k kör tetszőleges pontja, ennek vetülete az x tengelyen A, az y tengelyen B és az AB egyenesen Q. Ha P befutja a k kört, akkor Q mértani helye a g görbe.

Valóban, legyen $P(a,\ b)$, ahol

$$a^2+b^2=1. \tag{2}$$

Így $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$, az AB egyenes egyenlete

$$bx+ay=ab,$$

a P-n átmenő, AB-re merőleges egyenes egyenlete

$$ax-by=a^2-b^2,$$

és Q metszéspontjuk koordinátái

$$x_Q=a^3, \qquad y_Q=b^3. \tag{3}$$

Eszerint P koordinátái a Q koordinátáival kifejezve

$$a=x_Q^{1/3}, \qquad b=y_Q^{1/3}, \tag{4}$$

s mivel ezek kielégítik (2)-t, Q koordinátái között fennáll az adott (1).

Megfordítva, ha $Q(x,\ y)$ a g-nek tetszőleges pontja, akkor a (4) koordinátákkal bíró $P(a,\ b)$ pont rajta van k-n, és belőle kiindulva (3) szerint éppen Q-t kapjuk, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

b) Asztroisunk szimmetrikus az x, y tengelyekre és szögfelezőikre, mert ugyanez áll a származtatásában felhasznált k-ra és x, y tengelyekre. g-nek az x, y tengelyeken levő pontjai a k-n is rajta vannak – ezeket g csúcsainak szokás nevezni –, minden más pontja a származtatás szerint a k belsejében van. Megmutatjuk, hogy g-hez a tetszőleges belső Q pontjában húzott érintő azonos a származtatásában szereplő AB egyenessel. A szimmetria alapján elég a bizonyítást egy olyan pontra elvégezni, amely az I. síknegyed szögfelezője és az x tengely pozitív fele közti (45°-os) szögtartományban van, vagy magán a szögfelezőn, azaz $x\geq y>0$ és így (3) alapján $a\geq b>0$; P is a mondott szögtartományban van.

Q ordinátája mint az abszcissza függvénye (1)-ből

$$y=y(x)=(1-x^{2/3})^{3/2},$$

és ez a $0<x<1$ intervallumban differenciálható. Deriváltja, vagyis a görbe érintőjének iránytangense

$$y'(x)=\frac{3}{2}(1-x^{2/3})^{1/2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-1/3}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3},$$

és ez (3) szerint egyenlő az AB egyenes meredekségével, $(-b/a)$-val, tehát AB valóban érinti g-t.

c) A feladatban említett 8 metszéspont között a szimmetria alapján van olyan, mely a mondott síknyolcadban van, legyen ez ismét Q, és az egyik négyzet $QRST$ úgy, hogy R a II., T a IV. síknegyedben van. Ekkor a QR egyenes Q-ban érinti g-t, tehát azonos a fenti AB egyenessel, a Q-t kimetsző $PQ(\perp AB)$ egyenes pedig a négyzet QT oldalegyenesével. Eszerint TQ átmegy P-n, másrészt QR-nek az O origó körüli $(-90°)$-os elfordításával áll elő. Így TQ az x tengelyt a b abszcisszájú B' pontban, az y tengelyt a $-a$) ordirnátájú A' pontban metszi, és meredekségének kétféle kifejezéséből:

$$b:(a-b)=a:b, \tag{5}$$
$$ab=a^2-b^2.$$

d) Mármost a keresett sugárra (3), valamint (2) felhasználásával

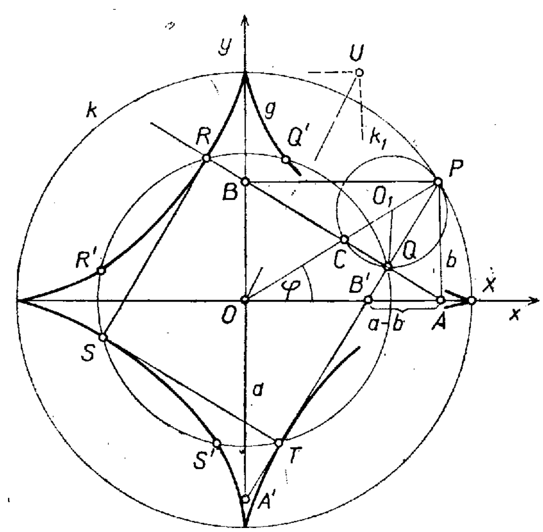
$$r^2=OQ^2=x^2+y^2=a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)=(a^2+b^2)^2-3a^2b^2=1-3a^2b^2,$$

másrészt (5)-ből négyzetreemeléssel hasonlóan

$$a^2b^2=a^4-2a^2b^2+b^4=1-4a^2b^2, \qquad a^2b^2=1/5,$$

tehát $r=\sqrt{2/5}$. Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A vizsgált $QRST$ négyzethez vezető P pont (5) alapján úgy szerkeszthető, hogy az $U(1/2,\ 1)$ pontot összekötjük O-val, ekkor az XOU szög felezője metszi ki P-t. Ugyanis $XOP\sphericalangle=\varphi$ jelöléssel $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, ezekkel (5)-ből $(1/2)\sin 2\varphi=\cos 2\varphi$ és $\operatorname{tg} 2\varphi=2$. – A feladatban említett másik négyzet $QRST$-nek az I. síknegyed felezőjére (az $y=x$ egyenletű egyenesre) vonatkozó tükörképe.



2. Ha k belsejében úgy gördítünk egy $1/4$ sugarú k_1 kört, hogy ez álladóan érintse k-t, akkor k_1 minden pontja asztroist ír le (eszerint az asztrois az ún. hipocikloisok osztályának tagja). Speciálisan g-t az a pontja írja le k_1-nek, amely a gördülés folyamán k-nak az x tengelyen levő X pontjával kerül érintkezésbe. Amikor ez a pont áthalad Q-n, akkor k_1 a P-ben érinti k-t. Az $OAPB$ téglalap középpontját C-vel jelölve CP a k_1 átmérője, ennek O_1 felezőpontja a k_1 középpontjának pillanatnyi helyzete, $ACP\sphericalangle = 2\varphi$, $QO_1P\sphericalangle = 4\varphi$, és így k_1-nek PQ íve egyenlő hosszú k-nak PX ívével.