Jelöljük a keresett valószínűséget p_N-nel. Mivel 5 játékos lehetséges párosításainak a száma $\binom{5}{2} = 10$, azért 10 cédulát készítettek. Ezek közül az első N játék számára

$$V_N = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (11 - N)$$

-féleképpen választhatjuk ki a cédulákat. Jelöljük K_N-nel azoknak a választásoknak a számát, amelyekben valamelyik három játékosnak mindhárom lehetséges párosítása szerepel. Ekkor, mivel az egyes választások egyformán valószínűek, $p_N = K_N/V_N$.-

Az első N játék tervét úgyis elkészíthetjük, hogy először egyszerre veszünk ki N cédulát, majd a választott cédulákat sorba rakjuk. A kiválasztó lépésben $v_N = \binom{10}{N}$ lehetőség közül választunk egyet, és minden választásnál $N!$-féle sorrendet készíthetünk. (Valóban, $V_N = v_N \cdot N!$). Egy játéksorozat kedvező volta nem függ a játék sorrendjétől, ha tehát k_N-nel jelöljük azoknak a választásoknak a számát, (a játékok sorrendjére való tekintet nélkül), amelyekben valamelyik három játékos mindhárom lehetséges párosítása szerepel, akkor $K_N = k_N \cdot N!$ és

$$p_N = \frac{K_N}{V_N} = \frac{k_N}{v_N},$$

ahol, mint láttuk, $v_N = \binom{10}{N}$, így elegendő k_N értékét meghatároznunk.

Ha $N < 3$, akkor $k_N = 0$, hiszen egy kedvező választásnak legalább három játékot tartalmaznia kell, így érthető, miért kérdi a feladat csak $N \geqq 3$ mellett p_N értékét.

Ha $N = 3$, akkor kedvező választás csak valamelyik három játékos három játszmája lehet, így k_3 annyi, ahányféleképpen ezt a három játékost az öt közül kiválaszthatjuk: $k_3 = \binom{5}{3}$, és

$$p_3 = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{12}.$$

Ha $N = 4$, akkor egy kedvező választásban valamelyik három játékos három játszmáján kívül még egy tetszőleges játszma szerepel. Minden kedvező választáshoz csak egyféleképpen adható meg az a három játékos, akiknek minden játszmájuk szerepel a választásban, hiszen kétféle játékos-hármas összes játszmáinak a száma legalább 5. A kedvező választásokban szereplő három játékost ismét $\binom{5}{3}$-féleképpen választhatjuk, ezek három játékához a negyedik játszmát a többi 7 közül 7-féleképpen adhatjuk meg, tehát $k_4 = \binom{5}{3} \cdot 7$, és

$$p_4 = \frac{\binom{5}{3} \cdot 7}{\binom{10}{4}} = p_3 \cdot \frac{7 \cdot 4}{7} = \frac{1}{3}.$$

$N = 5$ mellett hasonló módszerrel $\binom{5}{3}\binom{7}{2}$ választást adhatunk meg (három játékos három játszmájához a maradék 7 játszma közül tetszőlegesen választva 2 továbbit), ezek azonban már nem mind különbözőek, hiszen azokat a választásokat kétszer is előállítottuk, amelyekben két játékos-hármas öt játéka van. Két játékos-hármas összes játszmáinak a száma akkor 5, ha egy játszma mindkét csoportban szerepel. Ez csak úgy lehet, ha a két csoport két játékosa közös, vagyis a választásban 4 játékos 6 játszmája közül valamelyik ötöt adtuk meg. (A hatodik az a játszma, amelyet az a két játékos játszana egymással, akik csak egy-egy csoportban vannak benne.) A kétszer számolt választások száma tehát $\binom{5}{4} \cdot 6$, vagyis

$$k_5 = \binom{5}{3}\binom{7}{2} - \binom{5}{4} \cdot 6,$$

és

$$p_5 = \frac{\binom{5}{3}\binom{7}{2} - \binom{5}{4} \cdot 6}{\binom{10}{5}} = \frac{210 - 30}{252} = \frac{5}{7}.$$

Ha $N \geqq 6$, egyszerűbb a kedvezőtlen választások C_N számát meghatározni a következő módon. Nem azt vizsgáljuk, hogyan lehet N játszmát kiválasztani úgy, hogy ne legyen köztük három játékos három játszmája, hanem azt, hogyan lehet $(10-N)$ játszmát megadni úgy, hogy a többi játszma között ne szerepeljen három játékos három játszmája. Egy ilyen választásban minden játékosnak szerepelnie kell, hiszen ha valamelyik nem szerepelne, akkor a többi négy játékos hat játszmája közül valamelyik hiányzana a választásból (hiszen $10-N<6$), ez a játszma és a benne szereplő két játékosnak a kihagyott játékossal játszott egy-egy játszmája három játékos három játszmája lenne, a többi N játszma tehát nem volna kedvezőtlen. Jelöljük a választásban szereplő egyik játszma játékosait A, B-vel. A többi három játékos (C,D,E) valamelyik játszmája ugyancsak szerepel a választásban, mondjuk a CD játszma. Láttuk, hogy az E játékosnak is szerepel valamelyik játszmája, és mivel E-nek a másik négy játékoshoz viszonyított szerepe még teljesen szimmetrikus, azért feltehetjük, hogy az AE játszmát választottuk. Ekkor még a BCE, BDE hármas egyetlen játszmáját sem választottuk, tehát még legalább egy játszmát választanunk kell, és az csak a bennük közös BE játszma lehet. Azt kaptuk, hogy a többi $(10-N)$ játszmát csak akkor választhatjuk meg kedvezőtlenül, ha $10-N=4$, $N=6$, és ilyen esetben a választás akkor kedvezőtlen, ha benne három játékos három játszmája szerepel, és a negyedik játszma a másik két játékos játszmája. Így $C_6=\binom{5}{3}$, és $C_N=0$, ha $N>6$, azaz

$$p_6=1-\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{4}}=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21},$$

$$p_7=p_8=p_9=p_{10}=1.$$

II. megoldásként minden szöveg nélkül egy „beszédes ábrát” közlünk. Reméljük, hogy az ábra megfejtése – kifejezőbb szóval: *értelmezése* – tanulságos lesz az olvasók részére.