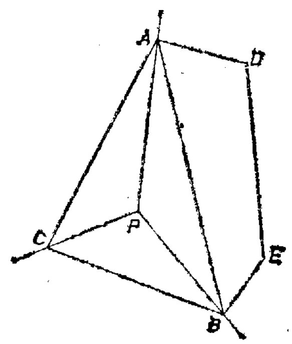
Legyen H olyan pontrendszer, amelyben nincs három, egy egyenesen levő, és nincs öt, egy konvex ötszöget meghatározó pont. Azzal igazoljuk a feladat állítását, hogy megmutatjuk: H-nak legföljebb 8 pontja van.

Legyen H konvex burka K, és a H-ból K-hoz nem tartozó pontok konvex burka k. Feltevésünk szerint H-nak K-hoz is, k-hoz is legfeljebb négy pontja tartozik, vagyis K is, k is vagy háromszög vagy négyszög. Igaz tehát az állításunk, ha H-nak minden pontja vagy K-hoz, vagy k-hoz tartozik.

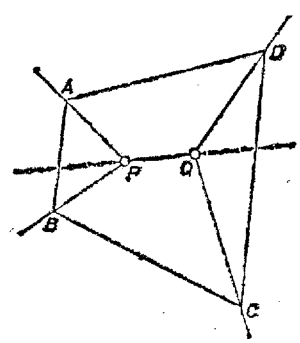
Tegyük fel, hogy van H-nak legalább egy, sem K-hoz, sem k-hoz nem tartozó pontja, jelöljük ezt (ill. az ilyenek egyikét) P-vel. P nyilván k belsejében van. Abban az esetben, ha k négyszög, bontsuk az egyik átlójával két háromszögre : ezek egyike belsejében tartalmazza P-t. Jelöljük ennek a háromszögnek a csúcsait A-val, B-vel, C-vel. Ha pedig k háromszög, akkor A, B, C legyen a k három csúcsa. (Az A, B, C pontok mindkét esetben természetesen H pontjai.) A PA, PB, PC félegyenesek három részre bontják a síkot, K csúcsai e részek belsejébe esnek. Megmutatjuk, hogy e részekben csak egy–egy csúcsa lehet K-nak, azaz K háromszög. Ha ugyanis K valamely DE oldalszakasza például az APB szögtartományban volna, akkor – mint H minden pontja – az A, B, P pontok is a DE egyenes egyik oldalán volnának, és az A, B, P, D, E pontok egy konvex ötszöget határoznának meg (1. ábra).



1. ábra

Így K és k pontjainak száma együttvéve legföljebb 7, elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy H-nak csak egy pontja lehet k belsejében. Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy H-nak mondjuk a P és Q pontja van k belsejében.

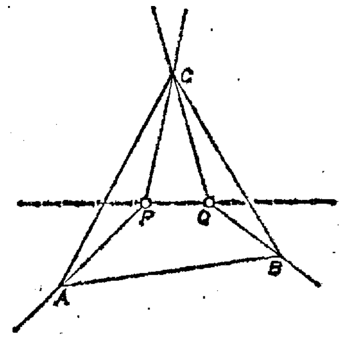
Ha k négyszög, akkor a PQ egyenes csak szemközti oldalait metszheti, hiszen ha k-nak három csúcsa volna a PQ egyenes egyik oldalán, ezek a P, Q pontokkal együtt egy konvex ötszöget határoznának meg. Jelöljük k csúcsait A, B, C, D-vel és válasszuk úgy a betűzést, hogy a PQ félegyenes CD, a QP félegyenes az AB szakaszt messe (2. ábra).



2. ábra

A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy az APB, CQD szögtartományban K-nak csak egy–egy csúcsa lehet. A PB, QC félegyenesek és a PQ szakasz által határolt síkrészben viszont egyetlen csúcsa sem lehet K-nak, különben az a B, P, Q, C pontokkal együtt konvex ötszöget határozna meg. Ugyanígy a PA, QD félegyenesek és a PQ szakasz által határolt síkrészben sem lehet csúcsa K-nak, így ellentmondásra jutottunk, hiszen ezek szerint K-nak csak két csúcsa lehetne.

Ha k háromszög, jelöljük a csúcsait A, B, C-vel, és válasszuk úgy a betűzést, hogy a PQ félegyenes a BC, a QP félegyenes az AC szakaszt messe (3. ábra).



3. ábra

Ekkor a PA, QB félegyenesek és a PQ szakasz által határolt síkrészben nem lehet csúcsa K-nak, az APC, BQC szögtartományokban pedig csak egy–egy csúcsa lehetne. Ismét ellentmondásra jutottunk, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.