a) Jelöljük adott (és egymástól páronként különböző) köreinket k_1-gyel, k_2-vel, k_3-mal, a keresett inverzió alapkörét – föltéve, hogy létezik – k-val, köreink erre invertált képeit k_1', k_2', k_3',-vel, a középpontjaikon átmenő egyenest e'-vel és ennek k-ra való inverzét – más szóval eredetijét – e -vel.

Mint tudjuk, e akkor és csak akkor adódik egyenesnek, ha e' átmegy a k alapkör középpontján, és ekkor e egybeesik e'-vel (de nem pontról pontra azonosak), különben pedig körnek adódik e. Ebből mindjárt látjuk, hogy ha a kívánt tulajdonság már az eredeti k_1, k_2, k_3 körhármasra fennáll – vagyis középpontjaik egy e egyenesen vannak –, akkor található a kívánt k alapkör, éspedig középpontjául választható e-nek bármely pontja, kivéve a k_j-vel ($j = 1, 2, 3$) való metszéspontjait – hiszen kör inverz képe akkor és csak akkor nem kör, ha átmegy az inverzió centrumán –, k sugara pedig tetszőleges.

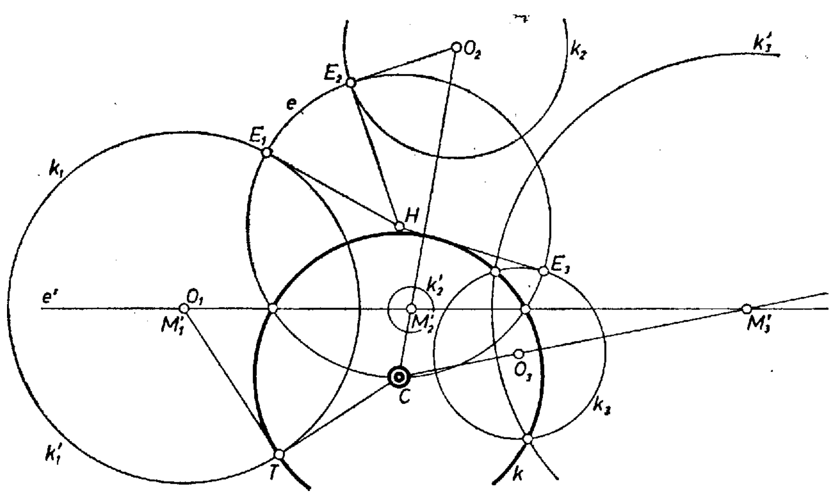
Az adott k_j körök középpontjai általában nincsenek egy egyenesen. Ilyenkor azt a tulajdonságot, hogy a k_j' körök középpontjai az e' egyenesen vannak, a következő alakban használjuk majd fel: e' merőlegesen metszi k_j' mindegyikét. Ugyanis az inverzió szögtartó, részletesebben kimondva: körök, egyenesek képei közti szög egyenlő az eredeti vonalak közti megfelelő szöggel; az utóbbit úgy értve, hogy kör helyett mindig a metszéspontbeli érintőjét tekintjük a szög megfelelő szárának. Eszerint már e-nek merőlegesen kell metszenie k_j mindegyikét, és ekkor a keresett k szerepére megfelel minden olyan kör, melynek középpontja e-n van. (De k középpontjának ismét nem szabad egybeesnie e és a k_j körök közös pontjaival, mert feladatunk csak olyan megoldást fogad el, melyben mindegyik k_j képe is kör.)

A kérdés tehát erre redukálódott: van-e olyan e kör, amely k_j ($j = 1, 2, 3$) mindegyikét merőlegesen metszi. Fel fogjuk használni a következő fogalmakat: pontnak körre vonatkozó hatványa, két kör hatványvonala, három kör hatványpontja. Ezeket és néhány rájuk vonatkozó tételt itt összefoglalunk.[1]

P pontnak az O középpontú, r sugarú k körre vonatkozó *hatványa* $PO^2 - r^2$ (k belső pontjaira negatív, k pontjaira 0, külső pontokra pedig pozitív és egyenlő a P-ből k-hoz húzott érintőszakasz négyzetével.) – Azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek az O_1 és O_2 középpontú körökre vonatkozó hatványa egyenlő, egyenes, mely merőleges az O_1O_2 centrálisra. Ezt a mértani helyet más néven a két kör *hatványvonal*ának nevezzük. Koncentrikus köröknek nincs hatványvonaluk. Két egymást metsző kör hatványvonala a metszéspontjaikat összekötő egyenes. Két egymást érintő kör hatványvonala a közös pontjukban húzott érintőjük. – Három kör páronként vett hatványvonalai – ha a három középpont nincs egy egyenesen – egy pontban, a három kör ún. közös *hatványpont*jában metszik egymást.

Ezekből következik, hogy három körhöz – melyek középpontjai nincsenek egy egyenesen (vagyis amilyen körhármas esetére még nem adtuk megoldását feladatunknak) – létezik egy és csak egy olyan pont, melynek a három körre vonatkozó hatványa egyenlő. Ez vagy mindhárom körre nézve külső pont, vagy mindháromnak közös belső pontja, illetve a közös pontjuk, ha a három kör egy ponton megy át; e háromféle esetnek megfelelően a hatvány közös értéke, pozitív, negatív, ill. 0.

Mármost redukált kérdésünkre a válasz az első esetben igenlő, az utóbbi kettőben viszont nem létezik a keresett inverzió. Ugyanis az első esetben a hatványpontból a három körhöz húzott érintőszakasz egyenlő, és ezzel a hosszúsággal mint sugárral a hatványpont körül írt kör a három kört merőlegesen metszi. Ezt mutatja az 1. ábra.



1. ábra

H a hatványpont, $HE_1 = HE_2 = HE_3$ az érintőszakaszok. A H körüli, E_1-en átmenő e körön választottuk az inverzió C centrumát, k-nak CT sugarát pedig speciálisan úgy, hogy k merőlegesen messe k_1-et; így k_1' mindjárt azonos magával k_1-gyel. A körök középpontjai O_j, képeiké M_j, az O_jM_j ($j = 2, 3$) egyenes átmegy C-n. (Magának H-nak a szerkesztését nem tüntettük fel. E célra pl. k_1 és k_2 hatványvonala a hatványpont idézett tétele szerint úgy szerkeszthető, hogy véve egy mindkettőt metsző k_4 kört, a k_1, k_4 és a k_2, k_4 körpár közös húregyeneseinek metszéspontjából merőlegest állítunk az O_1O_2 egyenesre.)

[1] A bizonyítások megtalálhatók pl. a következő helyen: *Tolnai Jenő:* Érdekes matematikai gyakorló feladatok. II. kötet. Középiskolai Szakköri Füzetek. Tankönyvkiadó. Budapest, 1971. 22–23. oldal.

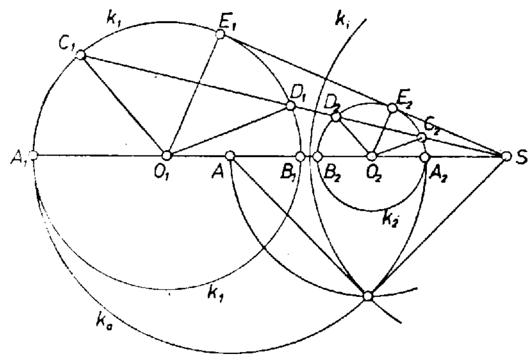
b) A feladat második kérdésének előkészítéséül vegyük észre, hogy két kör sugara akkor és csak akkor egyenlő, ha van olyan (közönséges) tengelyes tükrözés, amely őket egymásba viszi át (ti. a középpontjaik közti szakasz felező merőlegesére való tükrözés ilyen; ha pedig koncentrikusak a körök, akkor bármely, a centrumukon átmenő egyenes ilyen).

Felhasználjuk továbbá P. 31 probléma[2] segédtételét, a következő alakban. Ha P, f, Q egy tárgy–tükör–kép rendszer, ahol f egy inverzió alapköre vagy egy egyenes – azaz P és Q egymás képei f-re –, továbbá egy inverzióban vagy közönséges tengelyes tükrözésben P, f, Q képe rendre P', f', Q', akkor P', f', Q' is egy tárgy–tükör–kép rendszer. (Itt tehát 3 inverzióról van szó, amelyek közt tengelyes tükrözések is fölléphetnek.)

Ezeket egybevetve, az adott köreink közül választott kettőnek – mondjuk a k_1-nek és k_2-nek – valamely k körre való invertált képei, k_1' és k_2' akkor és csak akkor lesznek egyenlő sugarúak, ha van olyan inverzió vagy tengelyes tükrözés, mely k_1-et és k_2-t egymásba viszi át. Ha van, akkor ennek az inverziónak az f alapkörét, ill. tengelyét egy f' egyenessé kell transzformálnunk a keresett k körre való invertálás útján, ehhez pedig elég k centrumát f-en úgy megválasztani, hogy ne legyen rajta egyidejűleg se k_1-en, se k_2-n.

Állítjuk, hogy a sík bármely két, k_1 és k_2 köréhez van olyan k_i alapkör, amelyre való invertálás a két kört egymásba viszi át. A bizonyítást csak vázoljuk.

Egymáson kívül álló körök esetében a keresett inverzió centruma csak a körök S külső hasonlósági középpontja lehet, csak S-nek van meg az a tulajdonsága, hogy a belőle kiinduló félegyeneseknek k_1-gyel ugyanannyi közös pontjuk van, mint k_2-vel: vagy 2 vagy 1 vagy 0. (Ez nyilván szükséges feltétel.)



2. ábra

A 2. ábra jelöléseivel $O_1C_1 \parallel O_2D_2$, $O_1D_1 \parallel O_2C_2$, a párhuzamos szelők tétele alapján

$$SC_1 : SD_2 = SO_1 : SO_2 = SD_1 : SC_2.$$

Másrészt a külső pontból húzott szelő és érintő tétele alapján

$$SC_i \cdot SD_i = SA_i \cdot SB_i = SE_i^2, \qquad (i = 1,\, 2)$$

és ezekből

$$SC_1 \cdot SC_2 = SD_1 \cdot SD_2 = \frac{SE_1^2}{SC_1} \cdot \frac{SE_2^2}{SC_2}, \qquad SC_1 \cdot SC_2 = SE_1 \cdot SE_2,$$

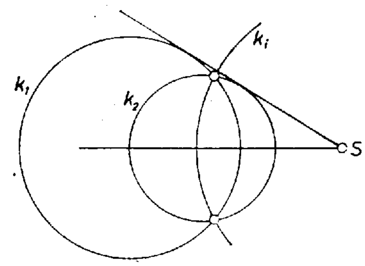
állandó, tehát a kívánt k_i alapkör sugara SE_1 és SE_2 mértani közepe. A tételt tudva, megszerkeszthető k_i abból is, hogy az A_1, A_2 pontok egymásba mennek át, ezért az A_1A_2 átmérőjű k_a kör önmagába megy át és – mint az 1. ábrán k_1 esetében – az alapkör átmegy az S-ből k_a-hoz húzott érintő T érintési pontján. – Meggondolásunk egymással kívülről érintkező körökre is érvényes. – S csak akkor nem létezik, ha k_1 és k_2 sugarai egyenlők, ekkor O_1O_2 felező merőlegese lép k_i helyére.

Hasonlóan látható be állításunk arra az esetre, ha k_2 a k_1 belsejében van. Ekkor az inverzió centruma k_1-nek és k_2-nek S' belső hasonlósági pontja (ahol a párhuzamos és ellentétes irányú sugaraik végpontjait összekötő egyenesek összefutnak), a meggondolásban S helyére S' és E_i helyére F_i teendő, az S'-ben O_1O_2-re állított merőlegesnek k_i-vel való metszéspontja. Ekkor k_i' sugara az $S'F_1$, $S'F_2$ szakaszok mértani közepe. ($S'F_i^2$ az S' pont k_i-re vonatkozó hatványának abszolút értéke: $S'F_i^2 = O_iF_i^2 - S'O_i^2 = r_i^2 - S'O_i^2$.) A fentebbi szerkesztés is érvényes, A_1 és A_2 a körök párhuzamos és egyirányú sugarainak végpontjai az O_1O_2 egyenesen. – Érvényes e meggondolás egymással belülről érintkező körökre, valamint két koncentrikus körre is.

---

[2] A probléma – megoldását – lásd K. M. L. 39. (1969) 155–156. – új bizonyítást kívánt a P. 12. problémára a következő segédtétel alapján. Ha g egy, a C ponton nem átmenő kör vagy egyenes, és egy P pontnak g-re vonatkozó inverze – ill. tükörképe, ha g egyenes – a Q pont, továbbá g-nek, P-nek, Q-nak egy C középpontú körre vonatkozó inverze g_1, P_1, ill. Q_1, akkor P_1-nek g_1-re vonatkozó inverze Q_1. Maga a P. 12. probléma pedig – megoldását lásd K. M. L. 38. (1969) 171–172. – a következőt kívánta. Bizonyítandó, hogy ha g egy a C ponton nem átmenő kör vagy egyenes, akkor egy C középpontú k körre vett inverz képének a középpontját úgy kaphatjuk meg, hogy C-nek g-re vonatkozó inverz képét (ill. tükörképét, ha g egyenes) invertáljuk k-ra. – Megjegyezzük, hogy a P. 31.-beli segédtétel bizonyítása nem használta fel, hogy g nem megy át C-n (erre a föltevésre csak a P. 12.-ben volt szükség, különben ugyanis g képe mindenképpen egyenes lenne, és nem volna értelme beszélni g középpontjáról). Ennélfogva a segédtétel érvényes akkor is, ha g átmegy C-n.

Végül ha k_1-nek és k_2-nek két közös pontja van, akkor mindkét meggondolás érvényes, két olyan inverziós alapkör van, mely k_1-et és k_2-t egymásba viszi át. A körük metszéspontjain mindkét alapkör átmegy (3. ábra).



3. ábra

Visszatérve feladatunk második kérdéséhez, k_1, k_2, k_3 közül kettőt kiszemelve és a fent mondott f-nek véve az őket egymásba átvivő inverzió alapkörét (vagy tükrözés tengelyét), f és a fenti – ha van ilyen – e kör közös pontja mint inverzió centrum teljesíti a követelményt, tetszőleges sugár mellett.