a) Először az állítás második részét bizonyítjuk. Föltesszük, hogy k háromszöget sikerült kijelölni az előírt módon, és megmutatjuk, hogy $k \le \frac{1}{3}\binom{n}{2}$. Mivel háromszögeink közül semelyik kettőnek nincs közös oldala – mondjuk ezúttal így: közös *éle* –, azért együttvéve $3k$ élük van. Ez a szám nem lehet nagyobb, mint az n pontból képezhető pontpárok, élek száma, ami $\binom{n}{2}$, így $3k \le \binom{n}{2}$, és ebből éppen az állításbeli felső korlát adódik k-ra.

b) Induljunk ki ismét abból, hogy egy kiválasztási próbában k db háromszög kijelölése után megakadtunk, vagyis bárhogy választunk ki egy $(k+1)$-edik háromszöget, annak valamelyik éle már valamelyik kiválasztott háromszögnek is éle. Másképpen mondva azt jelenti ez, hogy végigmenve a még föl nem használt éleken – amelyeknek száma az *a)* rész szerint $h = \binom{n}{2} - 3k$ –, és mindegyik ilyenhez hozzápróbálva harmadik csúcsnak a végpontjaitól különböző $(n-2)$ pont mindegyikét, e $p = h(n-2)$ próba során mindig tiltott háromszöget kaptunk; vagyis olyat, melynek legalább egy éle a már kijelölt $3k$ él közül való.

Tekintsük másrészt a ki nem jelölt háromszögek számát, ami $H = \binom{n}{3} - k$ (az első tag a pontjainkból kijelölhető ponthármasok száma, ha nincs korlátozás.) Fenti próbáink során mindig ilyen háromszöget kapunk, és ha egy ki nem jelölt háromszögnek 2 olyan oldala van, amely még ki nem jelölt él, azt 2-szer is megkaptuk, mindkét ilyen oldala révén. (3-szor azonban egyetlen ki nem jelölt háromszög sem adódhatott ki, hiszen ha egy gondolható háromszögnek egyik oldala sem szerepel a kijelölt háromszögek élei között, akkor az a háromszög kijelölhető, ilyen pedig nincs a föltevésünk szerint.)

Ezek szerint a végzett próbák száma nem nagyobb $2H$-nál, és ezt a felső korlátot mindjárt növelve

$$p = h(n-2) = \left\{\binom{n}{2} - 3k\right\}(n-2) \le 2H < 2\binom{n}{3} = \tag{1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \binom{n}{2} \cdot \frac{2(n-2)}{3}.$$

Innen pedig (mivel nyilvánvalóan elég az $n-2>0$ eseteket tekinteni)

$$3k > \binom{n}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right), \qquad k > \frac{1}{9}\binom{n}{2},$$

ezt kellett bizonyítanunk. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Stachó Balázs, Katona Endre

Megjegyzések. 1. Nem kapunk lényegesen nagyobb alsó korlátot, ha (1)-ben megállunk H eredeti kifejezésénél:

$$\left\{\binom{n}{2} - 3k\right\}(n-2) \le 2\binom{n}{3} - 2k\text{-ból} \qquad k \ge \frac{1}{3n-8}\binom{n}{3},$$

ugyanis ennek és az állításbeli alsó korlátnak a hányadosa csupán

$$\frac{3(n-2)}{3n-8} = 1 + \frac{2}{3n-8} \le 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{mihelyt} \quad n \ge 8.|$$

2. Nem lett volna helyes azt mondani, hogy a *b)* részben gondolt próbák során minden ki nem jelölt háromszöget megkaptunk (legalább egyszer), mert létezhet olyan háromszög, melynek mindhárom oldala szerepel kijelölt háromszög éleként, de mindegyik oldala más-más kijelölt háromszögben.

3. Az állításbeli felső korlát általában nem javítható, mert pl. $n=7$ esetén lehet kijelölni $\frac{1}{3}\binom{7}{2} = 7$ háromszöget, a csúcsokat az $1, 2, \ldots, 7$ számokkal jelölve ilyen kijelölés a következő:

$$1,2,3; \quad 1,4,5; \quad 1,6,7; \quad 2,4,6; \quad 2,5,7; \quad 3,4,7; \quad 3,5,6.$$

4. Megoldásunkban többet bizonyítottunk be a feladat állításánál. A feladat csak annyit állít, hogy a háromszögek alkalmas megválasztásával biztosítani lehet legalább $\frac{1}{9}\binom{n}{2}$ háromszöget, megoldásunkból pedig az derült ki, hogy ehhez semmi ügyeskedésre nincs szükség, lépésről lépésre tetszőlegesen választva a már kiválasztott háromszögekhez egy további „szabad" háromszöget, mindig legalább $\frac{1}{9}\binom{n}{2}$ háromszöget kapunk. Ez azt mutatja, hogy az alsó korlátot lehetne tovább javítani.