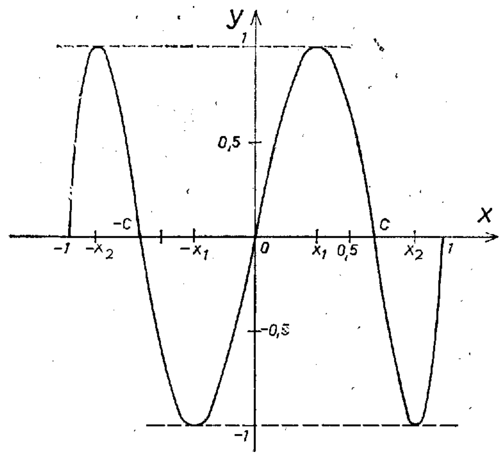
Ötödfokú polinomnak legföljebb 4 különböző helyen lehet szélső értéke – amennyiben deriváltjának, ami negyedfokú, mind a négy zérushelye valós és egymástól különböző –, és a 4 szélső érték közt csak váltakozva követheti egymást a 2 maximum és a 2 minimum, mert bármelyik szomszédos párjuk közt a derivált értéke vagy állandóan pozitív vagy állandóan negatív. Mivel a keresett $p(x)$ esetében a maximumok pozitívok, a minimumok negatívok, egy-egy maximum és minimum között zérushelye is van $p(x)$-nek, szám szerint 3.



Elég lesz olyan $p(x)$-et képezni, amelyre a közbülső zérushelyek egyike $x = 0$, a további kettő pedig $\pm c$, ahol $0 < c < 1$. Elképzelésünk szerint tehát a polinom ilyen alakú:

(1)
$$p(x) = A(x+1)(x+c)x(x-c)(x-1) = \\ = A[x^5 - (1+c^2)x^3 + c^2x],$$

ahol A is meghatározandó állandó. Azt fogjuk belátni, hogy az A és c paraméterek értéke megválasztható úgy, hogy $p(x)$-re teljesüljenek a feladat követelményei.

A szélső értékek helyei csak a derivált gyökhelyei lehetnek, tekintsük tehát a

(2)
$$p'(x) = A[5x^4 - 3(1+c^2)x^2 + c^2] = 0$$

negyedfokú egyenletet. Ennek x^2-re mint ismeretlenre két különböző valós gyöke van, ha

$$D = 9(1+c^2)^2 - 20c^2 > 0,$$

ami valóban teljesül, hiszen

$$D = 9 - 2c^2 + 9c^4 = 9\left(1 - \frac{c^2}{9}\right)^2 + \frac{80}{9}c^4 > 0.$$

($x = 0$ nem gyöke (2)-nek, hiszen $c \neq 0$.) Jelöljük e gyökök közül a pozitívakat x_1-gyel és x_2-vel – a másik kettő $-x_1$ és $-x_2$ –, ekkor a gyökök és az együtthatók közti összefüggés szerint (a (2)-t x^2-re vonatkozó másodfokú egyenletnek tekintve)

(3)
$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3(1+c^2)}{5}; \quad x_1^2x_2^2 = \frac{c^2}{5}$$

és $p'(x) = 5A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)$. Ebből láthatjuk, hogy $p'(x)$ mind a négy gyökhelyen előjelet vált, ezekben tehát $p(x)$-nek valóban szélső értéke van.

Azt szeretnénk, ha mondjuk

(4)
$$p(x_1) = +1; \qquad p(x_2) = -1$$

volna; mivel $p(x)$ páratlan függvény, ebből már következik, hogy

$$p(-x_1) = -1; \qquad p(-x_2) = +1.$$

Elegendő ehhez c-t úgy megválasztanunk, hogy

(5)
$$p(x_1) + p(x_2) = 0$$

legyen, hiszen az A állandó megválasztható úgy, hogy $p(x_1) = 1$ legyen, és akkor (5) alapján $p(x_2) = -1$ is teljesül. Mivel x_1 és x_2 gyöke (2)-nek,

$$5x_i^5 = 3(1+c^2)x_i^3 - c^2x_i \qquad (i = 1,\ 2),$$

így (3) alapján $p(x_1)+p(x_2)$ előállítható anélkül, hogy x_1 és x_2 értékét meg kellene adnunk:

$$\begin{aligned}&\frac{5}{A}[p(x_1)+p(x_2)]=(5x_1^5+5x_2^5)-5(1+c^2)(x_1^3+x_2^3)+5c^2(x_1+x_2)=\\&=4c^2(x_1+x_2)-2(1+c^2)(x_1^3+x_2^3)=2(x_1+x_2)[2c^2-(1+c^2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)]=\\&=2(x_1+x_2)\left[2c^2-(1+c^2)\left(\frac{3+3c^2}{5}-\frac{c}{\sqrt{5}}\right)\right].\end{aligned}$$

(Felhasználtuk, hogy x_1, x_2, c pozitív volta miatt (3)-ból $x_1x_2=\dfrac{c}{\sqrt{5}}$ következik.)
Ez csak úgy lehet 0, ha c gyöke a

$$2c^2-(1+c^2)\left(\frac{3+3c^2}{5}-\frac{c}{\sqrt{5}}\right)=0 \tag{6}$$

egyenletnek. Osszuk ezt c^2-nel és helyettesítsük $c+\dfrac{1}{c}$ helyére y-t, így a

$$2-y\left(\frac{3y}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei

$$y_1=\sqrt{5},\qquad y_2=-\frac{2\sqrt{5}}{3},$$

de mivel $c+\dfrac{1}{c}\ge 2$, számunkra csak y_1 használható. A

$$c+\frac{1}{c}=\sqrt{5}$$

másodfokú egyenletből pedig

$$c_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2};\qquad c_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

és célunknak csak c_1 felel meg, mert $c_2>1$. c_1 valóban gyöke (6)-nak, tehát mellette $p(x)$-re teljesül (5).

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy c_1 mellett x_1 és x_2 is a $(0,\,1)$ intervallumhoz tartozik. Valóban, így

$$x_1^2=\frac{10-4\sqrt{5}}{10}<1,\qquad \text{és}\qquad x_2^2=\frac{5+\sqrt{5}}{10}<1.$$

Végül A-t meghatározva és megelégedve az állandók közelítő, de áttekinthető értékeivel, (1) helyére konkrétan a következő polinom lép:

$$p(x)=12{,}4(x^5-1{,}38x^3+0{,}38x).$$

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy $p(x)$-en és $-p(x)$-en kívül nincs más megoldása a feladatnak.