Jelöljük általában $H(n)$-nel az n pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek lehető legnagyobb számát, vagyis $H(n)$-nek megvan a következő két tulajdonsága: *a)* bárhogy adunk meg n pontot a síkon (kölcsönös helyzetük szerint), az általuk meghatározott hegyesszögű háromszögek száma nem nagyobb, mint $H(n)$, *b)* meg tudunk adni n pontot úgy, hogy az általuk meghatározott hegyesszögű háromszögek száma $H(n)$ legyen. Mivel n pont $T(n) = \binom{n}{3}$ háromszöget határoz meg, az összes háromszögek legfeljebb $h(n) = \frac{H(n)}{T(n)}$ része lehet hegyesszögű. Feladatunk állítása ezzel a jelöléssel a

$$h(100) \leq 0{,}7 \tag{1}$$

egyenlőtlenséget jelenti, ezt fogjuk bizonyítani. Ennek érdekében először azt mutatjuk meg, hogy $h(n)$ az n növelésével monoton csökken.

Vegyünk fel tetszőlegesen $(n+1)$ pontot és jelöljük az általuk meghatározott hegyesszögű háromszögek számát $K(n+1)$-gyel. (Az előbb definiált $H(n+1)$ az ilyen konkrét $K(n+1)$-számok között a legnagyobbik, ha az $(n+1)$ pontot minden lehetséges módon felvesszük.) Tegyük fel, hogy a pontok sorszámozva vannak, és hagyjuk el közülük az elsőt. A visszamaradó n pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek számát jelöljük $K_1(n)$-nel. Hasonló módon jelöljük $K_j(n)$-nel a j-ik pont elhagyása után visszamaradó n pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek számát. Az

$$S_n = K_1(n) + K_2(n) + \ldots + K_{n+1}(n) \tag{2}$$

összegben az eredeti $(n+1)$ pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek száma szerepel, de minden ilyen háromszöget többször vettünk számításba. Egy adott hegyesszögű háromszög ugyanis csak akkor nem szerepel $K_j(n)$-ben, ha a j-ik pont az illető háromszögnek csúcsa. Ez a háromszög tehát a (2) összeg 3 tagjában nem szerepel, vagyis $(n-2)$ tagjában szerepel. Emiatt S_n a hegyesszögű háromszögek számának $(n-2)$-szerese, azaz

$$S_n = (n-2) \cdot K(n+1). \tag{3}$$

Említettük már, hogy $K(n+1) \leq H(n+1)$, és hasonlóan $K_j(n) \leq H(n)$. Emiatt a (2) összeg bármelyik tagja nem nagyobb, mint $H(n)$, és így

$$S_n \leq (n+1) \cdot H(n),$$

ahonnan (3) alapján a

$$K(n+1) \leq \frac{n+1}{n-2} H(n)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel ez tetszőleges $(n+1)$ pontra érvényes, teljesül ez az egyenlőtlenség, a $K(n+1)$ számok legnagyobbikára, $H(n+1)$-re is:

$$H(n+1) \leq \frac{n+1}{n-2} \cdot H(n). \tag{4}$$

Behelyettesítve H helyére a h-val kifejezett értékét, a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk:

$$h(n+1) \cdot \binom{n+1}{3} \leq \frac{n+1}{n-2} \cdot h(n) \cdot \binom{n}{3}$$

$$\frac{1}{6} h(n+1) \cdot \{(n+1)n(n-1)(n-2)\} \leq \frac{1}{6}(n+1) \cdot h(n) \cdot \{n(n-1)(n-2)\},$$

$$h(n+1) \leq h(n),$$

$h(n)$ tehát valóban monoton csökken.

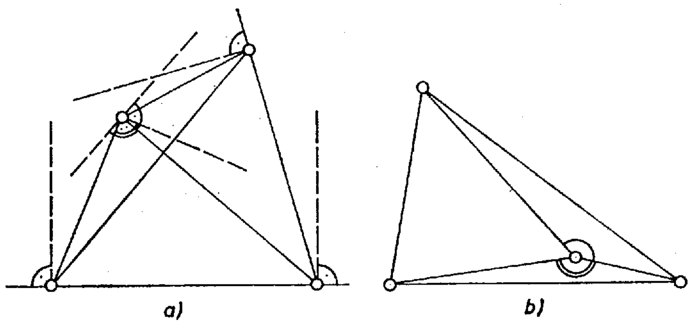
Mármost ahhoz, hogy (1)-et bebizonyítsuk, elegendő olyan $n \leq 100$ számot találni, melyre

$$h(n) \leq 0{,}7, \tag{5}$$

hiszen $h(n)$ monoton volta miatt (5)-ből következik (1).

Ha $n = 3$, akkor $h(3) = 1$, ez még túl nagy.

Ha $n = 4$, akkor $H(4) < 4$, mert nem lehet négy pontot úgy megadni, hogy az általuk meghatározott háromszögek mind hegyesszögűek legyenek. Ha ugyanis a négy pont konvex burka négyszög (az ábra *a)* része), e négyszög négy csúcsában levő szögei nem lehetnek mind hegyesszögek (összegük 360°), van köztük derékszög vagy tompaszög, ennek a csúcsát és a négyszög vele szomszédos másik két csúcsát véve, derékszögű vagy tompaszögű háromszöget kapunk.



Ha pedig a négyszög konvex burka háromszög, vegyük e konvex burok oldalaihoz harmadik csúcsnak a negyedik pontot, amelyik a háromszög belsejében van (az ábra *b)* része). E három háromszögnek a belső pontra támaszkodó szögeinek összege 360°, köztük van tompaszög, vagyis a megfelelő háromszög tompaszögű háromszög. Ezzel beláttuk, hogy $H(4) < 4$. Viszont az ábra *a)* része olyan esetet mutat, amikor $K(4) = 3$, tehát $H(4) = 3$, $h(4) = 0{,}75$, és ez még mindig nagyobb, mint 0,7.

Ha $n = 5$, akkor (4) szerint $H(5) \leq \frac{5}{2}H(4) = 7{,}5$, viszont $H(5)$ egész szám, tehát $H(5) \leq 7$, és $h(5) \leq 0{,}7$. Ezzel (5)-öt beláttuk az $n = 5$ értékre, amivel feladatunk állítását a fentebbiek szerint bebizonyítottuk.

Komjáth Péter