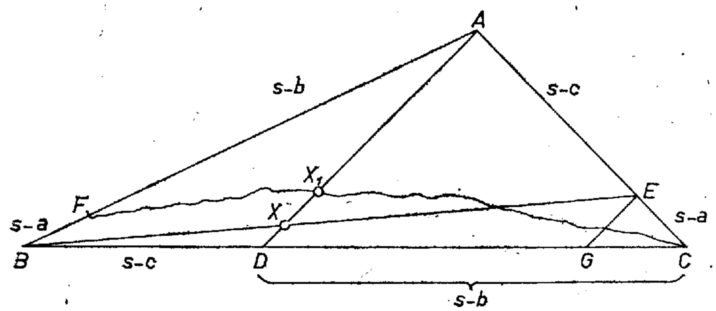
A háromszög-egyenlőtlenség biztosítja a kerület-felező egyenesek létezését. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c, a kerület felét pedig s betűvel. Legyen továbbá a B, C csúcshoz tartozó kerület-felező egyenesnek a szemben levő oldallal való metszéspontja rendre E, F. Legyen AD és BE metszéspontja X, míg AD és CF metszéspontja X_1. Azt kell belátnunk, hogy $X \equiv X_1$.



Elég ehhez megmutatni, hogy $AD : XD = AD : X_1D$. Határozzuk meg ezeket az arányokat. E célból húzzunk párhuzamost AD-vel E-n át, ez az egyenes a CD szakaszt egy belső pontban metszi, jelöljük ezt G-vel. A párhuzamos szelők tételei alapján, figyelembe véve, hogy

$$BD = AE = s - c, \quad AF = CD = s - b, \quad BF = CE = s - a,$$

felírhatjuk:

$$EG : AD = (s-a) : b, \tag{1}$$

$$XD : EG = (s-c) : \{(s-c,) + DG\}, \tag{2}$$

$$DG : (s-c) = (s-b) : b. \tag{3}$$

DG értékét kifejezve (3)-ból, s behelyettesítve (2)-be, nyerjük:

$$XD : EG = b : s, \tag{4}$$

(1) és (4) megfelelő tagjait összeszorozva, egyszerűsítés után:

$$XD : AD = (s-a) : s.$$

Vegyük észre, hogy ez az arány csak a-tól és s-től függ, ugyanezt az arányt kapjuk tehát, ha B és C szerepét fölcseréljük, amivel E és F, valamint X és X_1 szerepe is fölcserélődik. Ezért $X_1 = X$, amit bizonyítani akartunk.

Komjáth Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Bebizonyítható, hogy a három kerület-felező egyenes L metszéspontja, a háromszög S súlypontja, és a beírt kör O középpontja egy egyenesen van, mégpedig úgy, hogy S az OL szakasz O-hoz közelebb eső harmadoló pontja.

2. Vegyük észre, hogy D, E, F a háromszöghöz hozzáírt (kívülről érintő) körök érintési pontjai. Hasonló állítás bizonyítható arra az esetre is, mikor D, E, F a beírt kör érintési pontjai az oldalakon.

Martoni Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn., IV. o. t.)

3. A dolgozatok többsége a *Ceva*-tétel felhasználásával bizonyította az állítást. Ennek egyik rész-állítása azt mondja ki, hogy ha D, E, F rendre a BC, CA, AB egyenes pontja, és

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1,$$

akkor az AD, BE, CF egyenesek egy ponton mennek át. Ez ugyanúgy bizonyítható, mint ahogyan feladatunk állítását bizonyítottuk.