A feladat állítását a következő általánosabb alakban bizonyítjuk be. *Legyen adott a síkon n (≥ 3) pont, amelyek közül egyik három sincs egy egyenesen, ekkor ki lehet választani közülük hármat úgy, hogy az ezek által meghatározott háromszögnek van $\frac{180^\circ}{n}$-nél nem nagyobb szöge.*

Tekintsük pontjaink konvex burkát: ez valamilyen konvex k-szög, ahol $3 \leq k \leq n$. A k-szög belső szögeinek összege $(k-2)\cdot 180^\circ$, így a burkoló sokszögnek van olyan A csúcsa, amelynél levő α szögre fennáll az

$$\alpha \leq \frac{(k-2)\cdot 180^\circ}{k} = \left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot 180^\circ \leq \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180^\circ = \frac{(n-2)180^\circ}{n} \tag{1}$$

egyenlőtlenség. Kössük össze A-t a többi ponttal, így $n-1$ különböző egyenest kapunk, és ezek α-t $(n-2)$ részre bontják. E részek közül a legkisebb nem lehet nagyobb $\frac{\alpha}{n-2}$-nél, ezért (1) miatt

$$\frac{\alpha}{n-2} \leq \frac{180^\circ}{n},$$

tehát a keresett háromszög egyik csúcsa A, másik két csúcsa pedig az α legkisebb részének a szárain levő egy-egy pont.

Vegyük észre, hogy itt egyenlőség csak akkor állhat fenn; ha $k=n$, vagyis mind az n pont hozzátartozik a konvex burokhoz és $\alpha = \left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot 180^\circ$, vagyis az n-szög mindegyik szöge és annak mindegyik része egyenlő. Ez pedig csak akkor következhet be, ha az n pont egy szabályos n-szög n csúcspontja.

Speciálisan, $n=6$ esetén $\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$, így a feladat állítását bebizonyítottuk, sőt azt is megmutattuk, hogy található olyan 3 pont is, melyek által meghatározott háromszögnek van 30°-nál kisebb szöge, kivéve azt az esetet, amikor a 6 pont egy szabályos hatszög 6 csúcspontja.

Móri Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)
Petz Dénes (Budapest, Veres Pálné Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat állításánál kissé erősebb állítás a következő: ha a sík 6 adott pontja közül semelyik 3 sincs egy egyenesen, akkor kiválasztható közülük 3 úgy, hogy az általuk meghatározott háromszögnek van legalább 120°-os szöge. Ebből valóban következik a feladat állítása, hiszen ekkor a másik két szög összege legfeljebb 60°, tehát egyikük legfeljebb 30°. (A megfordítás nyilvánvalóan nem igaz.) Ezen erősebb állítás bizonyítását a következőkben vázoljuk: A konvex burok

– vagy hatszög – ekkor van olyan szöge, amely nem kisebb, mint $\frac{4\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$ (s ez természetesen$< 180^\circ$) –,

– vagy legföljebb ötszög – ekkor van olyan 3 pont a 6 között, amelyek által meghatározott háromszög belsejében is van pont. Ilyen pontból a háromszögnek legalább egy oldala legalább 120° alatt látszik.

Dombi Péter (Pécs, Nagy Lajos Gimn., III. o. t.)

2. Bebizonyítható, hogy 6 pont esetén legalább két háromszögnek van legföljebb 30°-os szöge.