u_1, u_2, v_1, v_2 ismeretében a rekurzió alapján u_n és v_n, és ezért s_n is meghatározható minden n természetes számra. Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy s_1, s_2, ..., s_{k-1} ismerete elegendő-e u_1, u_2, v_1, v_2 meghatározására. Mivel s_1, s_2, ..., s_{k-1} mindegyike kifejezhető u_1, u_2, v_1, v_2-vel (pontosabban ezek lineáris kombinációjával), azért s_1, s_2, s_3, s_4 ilyen előállítása egy négyismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszert ad u_1, u_2, v_1, v_2-re. Valóban,

$$\begin{gathered}
s_3 = u_3 + v_3 = (2u_2 + u_1) + (3v_2 - v_1),\\
s_4 = u_4 + v_4 = (2u_3 + u_2) + (3v_3 - v_2) =\\
= 2(2u_2 + u_1) + u_2 + 3(3v_2 - v_1) - v_2 = 5u_2 + 2u_1 + 8v_2 - 3v_1,
\end{gathered}$$

így a mondott egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
&(1) & u_1 \phantom{{}+2u_2} + v_1 \phantom{{}+3v_2} &= s_1,\\
&(2) & u_2 \phantom{{}-v_1} + v_2 &= s_2,\\
&(3) & u_1 + 2u_2 - v_1 + 3v_2 &= s_3,\\
&(4) & 2u_1 + 5u_2 - 3v_1 + 8v_2 &= s_4.
\end{aligned}$$

Ezt a rendszert könnyen megoldhatjuk:

$$\begin{aligned}
u_1 &= - s_2 + 3s_3 - s_4,\\
u_2 &= -s_1 + s_2 + 5s_3 - 2s_4,\\
v_1 &= s_1 + s_2 - 3s_3 + s_4,\\
v_2 &= s_1 \phantom{{}+s_2} - 5s_3 + 2s_4.
\end{aligned}$$

Tehát ha $k \geq 5$, azaz legalább s_1, s_2, s_3, s_4 adott, akkor s_1, ..., s_{k-1}-ből nemcsak s_k, de minden $s_n (n \geq k)$ meghatározható. Ha azonban $k \leq 4$, akkor s_k nem határozható meg egyértelműen. Ha például s_1, s_2, s_3 adott, de s_4 már nem, akkor (4)-be s_4 helyébe egy tetszőleges p számot írva, kapunk egy olyan megoldásrendszert, melyben s_4 helyett mindenütt p áll. Azaz a megoldásrendszer más és más p-re más és más lesz.

Megjegyzések. 1. A kérdést természetesen úgy értettük, hogy s_1, s_2, ..., s_{k-1} egy helyesen képezett sorozat tagjai, nem pedig tetszés szerint választott számok. Láttuk ugyanis, hogy már s_1, s_2, s_3, s_4 elég az u_n, v_n, s_n sorozatok visszaállítására.

2. Az u_n, v_n és s_n tagok rekurzív megadásából következik, hogy egyenletrendszerünk és annak megoldásrendszere helyes marad, ha bennük az indexek mindegyikéhez ugyanazt az egész számot hozzáadjuk. Következésképpen $k \geq 5$-re

$$\begin{aligned}
u_{k-4} &= \phantom{-s_{k-4}} - s_{k-3} + 3s_{k-2} - s_{k-1},\\
u_{k-3} &= -s_{k-4} + s_{k-3} + 5s_{k-2} - 2s_{k-1},\\
&\qquad\qquad (5)\\
v_{k-4} &= s_{k-4} + s_{k-3} - 3s_{k-2} + s_{k-1},\\
v_{k-3} &= s_{k-4} \phantom{{}+s_{k-3}} - 5s_{k-2} + 2s_{k-1},
\end{aligned}$$

és (4)-ből

$$\begin{aligned}
s_k &= 5u_{k-2} + 2u_{k-3} + 8v_{k-2} - 3v_{k-3} =\\
&= 5(2u_{k-3} + u_{k-4}) + 2u_{k-3} + 8(3v_{k-3} - v_{k-4}) - 3v_{k-3} =\\
&= 12u_{k-3} + 5u_{k-4} + 21v_{k-3} - 8v_{k-4}.
\end{aligned}$$

Innen és (5)-ből könnyen adódik, hogy ha $k \geq 5$, akkor

$$s_k = s_{k-4} - s_{k-3} - 6s_{k-2} + 5s_{k-1}.$$

Eszerint ha csak s_k-ra van szükségünk, ennek kiszámítása egyszerűbb, ha az ismert tagok közül a négy legnagyobb indexű tagot használjuk föl.

Móri Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)