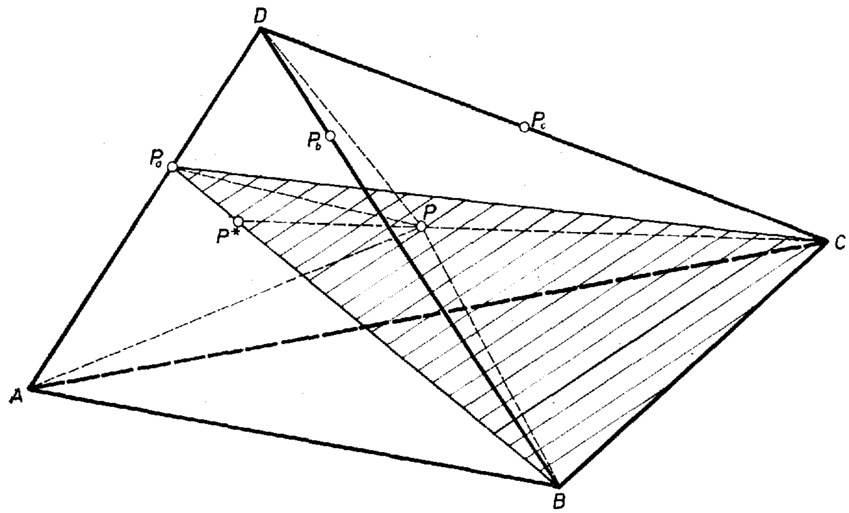
1. Legyen az $ABCD$ tetraéder tetszőleges belső pontja P. Ennek „belső" voltából következik, hogy ha a BC egyenessel határolt BCD félsíkot BC mint tengely körül úgy fordítjuk bele a BCA (alap-) síkba, hogy D a BC-nek A-t tartalmazó partjára jusson, akkor az elfordulás közben a félsík áthalad P-n (és sorra áthalad a DA szakasz pontjain).



1. ábra

Jelöljük a BCP félsík és a DA szakasz közös pontját P_a-val, és tekintsük a P közös csúccsal és PP_a közös éllel bíró PP_aAB és PP_aDC triédereket (1. ábra).

Alkalmazzuk rájuk azt a tételt, hogy *konvex triéder bármelyik két oldalának* (más szóval élszögének) *összege nagyobb, mint a harmadik oldala* (e segédtételt utólag bebizonyítjuk):

$$P_aPA\sphericalangle + APB\sphericalangle > P_aPB\sphericalangle,$$
$$P_aPD\sphericalangle + DPC\sphericalangle > P_aPC\sphericalangle.$$

Adjuk össze ezeket és a

$$CPB\sphericalangle = DPC\sphericalangle$$

egyenlőséget és vegyük figyelembe, hogy a bal oldali első szögek egy síkban vannak, ugyanúgy a jobb oldalon álló három szög is és hogy P a BCP_a háromszögnek belső pontja:

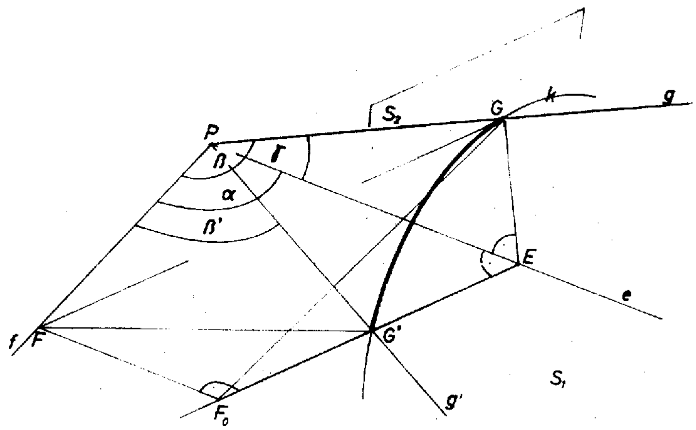
$$APD\sphericalangle + DPC\sphericalangle + CPB\sphericalangle + BPA\sphericalangle > 360^\circ. \tag{1}$$

Ismételjük meg végzett meggondolásunkat még kétszer, az A, B, C betűk helyére rendre előbb B, C, A-t, majd C, A, B-t írva, és felhasználva, hogy P abban a 180°-nál kisebb lapszögtartományban is benne van, melynek éle a CA egyenes, szárlapjai a CAB és CAD félsíkok (vagyis amely tartományban tetraéderünk is benne van), valamint hogy P az AB élű 180°-nál kisebb $C(AB)D$ lapszögtartományra nézve is belső pont. Így felírhatjuk (1)-et a mondott betű-változásokkal:

$$BPD\sphericalangle + DPA\sphericalangle + APC\sphericalangle + CPB\sphericalangle > 360^\circ, \tag{1'}$$
$$CPD\sphericalangle + DPB\sphericalangle + BPA\sphericalangle + APC\sphericalangle > 360^\circ. \tag{1''}$$

E három egyenlőtlenséget összeadva, a bal oldalon tetraéderünk mind a hat élének P-ből vett látószöge kétszer szerepel és a jobb oldalon 1080° is kétszerese az állításbeli szögnek, tehát az összeadás eredményét felezve a bizonyítandó állítást kapjuk (más tag ugyanis nincs).

2. A fölhasznált segédtételt a P csúccsal és a belőle kiinduló e, f, g félegyenesekkel meghatározott konvex triéderre bizonyítjuk, e 3 félegyenes tehát nincs egy síkban (2. ábra).



2. ábra

A triédernek az e, f élpár közti oldalát (a mértékszámát) α-val jelöljük, az f, g és a g, e oldalát β-val, γ-val, a jelölést úgy választva, hogy $180^\circ > \alpha \geqq \beta \geqq \gamma (> 0^\circ)$ legyen. Ekkor elegendő az

$$(2) \qquad \alpha < \beta + \gamma$$

egyenlőtlenséget bizonyítanunk ($\beta < \gamma + \alpha$ és $\gamma < \alpha + \beta$ nyilvánvalóan teljesül; sőt (2)-t is csak az $a > \beta \geqq \gamma$ nagyságviszony esetére kell, hiszen $\alpha = \beta$ esetén nyilvánvalóan fennáll).

Forgassuk bele g-t e körül e és f-nek S_1 síkjába, így $\gamma < \alpha$ miatt g az e, f szögtartományba jut a g' helyzetbe; ekkor e és g' szöge γ. Jelöljük g' és f szögét β'-vel, így (2) céljára a $\beta' < \beta$ egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. Vegyük föl f-en a F, g-n a G pontot úgy, hogy $PF = PG$ legyen, és jelöljük G új helyzetét g'-n G'-vel; így feladatunk a közös szárú GPF és $G'PF$ egyenlő szárú háromszögekre tekintettel $FG' < FG$ bizonyítására módosul.

A forgatás közben G egy k kör GG' ívét írja le, legyen k középpontja (az e tengelyen) E. A kör S_2 síkja merőleges e-re, ezért az e, f által meghatározott S_1 síkra is, így F-nek S_2-n levő F_0 vetületét a két sík EG' metszésvonalán kapjuk. Pontosabban: F_0 az EG' félegyenes pontja, mert $\gamma < \alpha < 180^\circ$ és $FF_0 || e$ miatt F_0 azon a partján van e-nek, mint G'. Így a k-nak F_0-hoz legközelebbi pontja G', tehát $F_0G' < F_0G$, végül a közös befogójú FF_0G' és FF_0G derékszögű háromszögekből $FG' < FG$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések. 1. Az (1) egyenlőtlenségbeli eredményünket kimondhatjuk így: Az $ABCD$ térbeli négyszög (torznégyszög) egymás utáni AB, BC, CD, DA oldalaihoz és a négyszög konvex burkában levő P ponthoz tartozó négy látószög összege nagyobb 360°-nál, vagyis a síkbeli négyszög négy oldalához és egy belső pontjához tartozó négy látószög összegénél.

2. Kissé más, önmagában szintén érdekes eredményt kapunk az alábbiak szerint. Messe a CP félegyenes az ABD lap síkját P^*-ban (1. ábra, a BP_a szakaszon), alkalmazzuk segédtételünket a P közös csúcsú, PP_a közös élű PP_aAP^* és PP_aBD triéderekre és képezzük a két egyenlőtlenség összegét:

$$P_aPP^*\sphericalangle + P_aPA\sphericalangle > P^*PA,$$
$$DPB\sphericalangle + DPP_a\sphericalangle > P_aPB\sphericalangle = P_aPP^*\sphericalangle + P^*PB\sphericalangle,$$

amiből

$$DPA\sphericalangle + DPB\sphericalangle > P^*PA\sphericalangle + P^*PB\sphericalangle.$$

Megfogalmazását az olvasóra hagyjuk. Erre is építhető a feladat állításának egy bizonyítása.

3. A feladatban szereplő 6 szög összege tetszőlegesen közel lehet 540°-hoz, ha közülük három közel van 0°-hoz, három pedig 180°-hoz, ami bekövetkezhet, ha például P és D „nagyon messze" vannak az A, B, C pontoktól, egymáshoz viszont „közel" vannak.

4. Segédtételünk kimondható így is: a háromszög egyenlőtlenség konvex gömbháromszögekre is érvényes. Ehhez (2)-ből így jutunk. Messe a P körüli egységnyi sugarú gömb a triéder e, f, g élét rendre az E^*, F^*, G^* pontban; így a triéder lapsíkjait a P körüli F^*G^*, G^*E^*, E^*F^* körívekben metszi. Ezek egyrészt a gömbünkön levő $E^*F^*G^*$ gömbháromszög oldalai, másrészt hosszuk rendre egyenlő az α, β, γ szög radiánban vett mértékszámával, tehát (2)-ben ezt kaptuk: $\widehat{E^*F^*} < \widehat{F^*G^*} + \widehat{G^*E^*}$, hacsak mindhárom oldal kisebb, mint π (ill. 180°).

5. A fölhasznált segédtételre egy más bizonyítást adtunk az 1646. feladat II. megoldásához fűzött megjegyzésben.[1]

[1]K.M.L. 41 (1970) 112. old.