I. Ha nem volna kikötve, hogy a pontok ne lehessenek egy egyenesen, akkor pl. a számegyenes összes racionális koordinátájú pontja eleget tenne a feladat első követelményének. Így természetesnek tűnik, hogy – amennyiben egyáltalán teljesíthető a követelmény – legkönnyebben olyan ponthalmazt konstruálhatunk, amelynek pontjai egynek a kivételével egy egyenesen vannak.

Próbáljuk ezért az egyenes szerepére a koordináta-rendszer x tengelyét venni, külső pontnak pedig a $P_0(0;1)$ pontot. Ha még a P_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ pontokat úgy adjuk meg, hogy minden k-ra $P_k = (\pm_k,\ 0)$ és x_k racionális, akkor csak arra kell ügyelnünk, hogy a P_0P_k távolság minden k-ra racionális legyen.

Legyen a $P(x,\ 0)$ pont olyan, hogy x racionális, azaz $x = r/s$, ahol r és s egész szám, $s \neq 0$. A P_0P távolság Pitagorasz tétele szerint

$$\sqrt{1+\frac{r^2}{s^2}}.$$

Ahhoz, hogy ez racionális legyen, az kell tehát, hogy

$$1+\frac{r^2}{s^2}=\frac{t^2}{u^2}$$

fennálljon, ahol t és u is egészek, $u \neq 0$.

Feltehető, hogy $s = u$, ez annyit jelent, hogy x és a P_0P távolság eleve közös nevezőre hozott alakban szerepel. Ekkor egyenlőségünk így alakul:

$$r^2+s^2=t^2.$$

Feladatunk tehát arra redukálódott, hogy olyan $r,\ s,\ t$ pozitív egész számokat kell keresni, melyekre $r^2+s^2=t^2$. Az ilyen számhármasokat pitagoraszi számhármasoknak nevezik. Megmutatjuk, hogy megadható végtelen sok ilyen számhármas, melyekre r/s mind különböző. Ebből már következik, hogy csupa különböző x koordinátájú ponthoz jutunk.

Legyen

$$r=k^2-1, \quad s=2k, \quad t=k^2+1,$$

ahol k egész szám. Könnyű belátni, hogy minden egész k-ra $r,\ s,\ t$ valóban pitagoraszi számhármas:

$$k^4+2k^2+1+4k^2=k^4+2k^2+1.$$

Másrészt

$$\frac{r}{s}=\frac{k^2-1}{2k}=\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right),$$

azaz minden k-ra r/s értéke más és más.

Tehát a

$$P_0=(0;\ 1),\ P_k=\left(\frac{k^2-1}{2k},\ 0\right) \quad k=1,2,\ \ldots$$

pontok eleget tesznek a feladat első követelményének, hiszen a P_kP_j távolság, ha $k > j > 0$, egész, akkor 2 racionális szám különbsége, és a P_kP_0 távolság

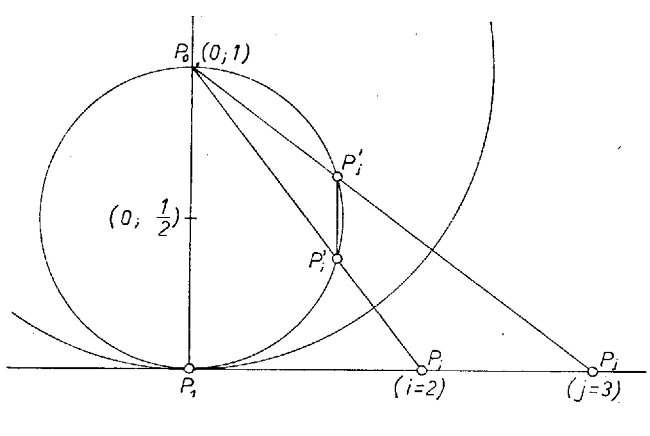
$$\sqrt{1+\left(\frac{k^2+1}{2k}\right)^2}=\frac{k^2+1}{2k},$$

és ez is racionális.

II. Ahhoz, hogy a feladat második követelménye is teljesüljön, egy olyan transzformációra volna szükség, mely az egyenest olyan görbébe viszi át, melynek semelyik 3 pontja nincs egy egyenesen.

Ilyen transzformáció az inverzió, egyenest általában körbe visz át.

Legyen az inverzió középpontja (pólusa) a fenti P_0 pont, és invertáljuk az x tengelyt a P_0 középpontú, egységsugarú körre. Erre az x tengely inverze a $(0;\ 1/2)$ középpontú, $1/2$ sugarú kör. Megmutatjuk, hogy a P_i' és P_j' inverz pontok $P_i'P_j'$ távolsága is racionális. A $P_0P_iP_j$ és $P_0P'P_i'$ háromszögek ugyanis hasonlóak, mert P_0-nál levő szögük közös, és (1. ábra):



1. ábra

$$\frac{P_0P_i}{P_0P_j} = \frac{P_0P_j'}{P_0P_i'},$$

hiszen az inverzió definíciója szerint $\overline{P_0P_i} \cdot \overline{P_0P_i'} = \overline{P_0P_j} \cdot \overline{P_0P_j'} = 1$. Az utóbbi egyenlőségből az is következik, hogy P_0P_i' és P_0P_j' is racionális, hiszen ezek a racionális P_0P_i, P_0P_j távolságok reciprokával egyenlőek. A hasonlóság miatt

$$P_i'P_j' = \frac{P_0P_i'}{P_0P_i} \cdot P_iP_j = \frac{P_iP_j}{P_0P_i^2},$$

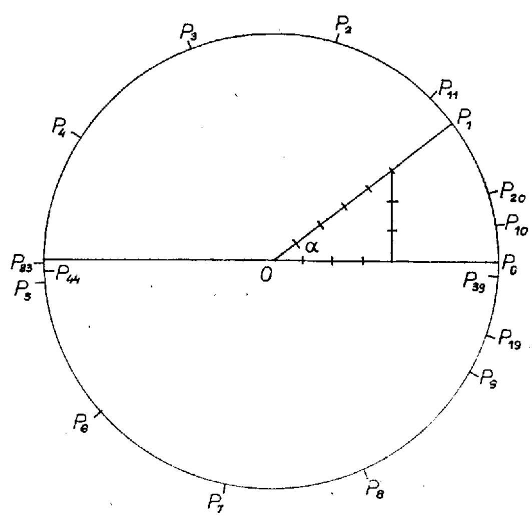
tehát $P_i'P_j'$ is racionális.

Ezek szerint a P_i pontok $(i > 0)$ invertálásával sikerült olyan pontokat megadni, melyek egy körön vannak, tehát köztük nincs három egy egyenesen, és közülük bármelyik kettő távolsága racionális. – Azt is látjuk, hogy a P pontokhoz P_0 -t is hozzávehetjük, hiszen P_0P_i' is racionális.

Komjáth Péter, Göndőcs Ferenc

II. megoldás. A feladat két részét egy csapásra oldjuk meg, ha megadunk végtelen sok pontot egy körön úgy, hogy közülük bármely két pont távolsága racionális.

Induljunk ki az egységsugarú kör egy P_0 pontjából, és forgassuk el a pontot rendre α, 2α, $\ldots$, $n\alpha$, $\ldots$ szöggel. A kapott pontokat jelöljük $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$-nel (2. ábra).



2. ábra

Nézzük meg, mi a feltétele annak, hogy így végtelen sok különböző pontot kapjunk. Nyilvánvaló, hogy akkor és csak akkor kapunk végtelen sok különböző pontot, ha nincs olyan n és k egész szám, amelyre $n\alpha = k \cdot \pi$ teljesül. Következésképpen ha nincs olyan n, melyre $\sin n\alpha = 0$ lenne, akkor valóban végtelen sok különböző pontot kapunk, n-et minden határon túl növelve.

Elegendő azt biztosítani, hogy a P_0P_n távolság racionális legyen minden természete n-re, hiszen ha $k < l$, akkor a P_kP_l távolság egyenlő a P_0P_n távolsággal, ha $n = l - k$. Jelöljük az OP_0P_n háromszög O-nál levő szögét ω-val, akkor

$$P_0P_n = 2\sin\frac{\omega}{2} = 2\left|\sin\frac{n\alpha}{2}\right|,$$

hiszen $(n\alpha - \omega)$ vagy $(n\alpha + \omega)$ a 2π-nek egész számú többszöröse. Jelöljük $\alpha/2$-t β-val, így olyan β kell keresnünk, melyre $\sin n\beta$ racionális minden n természetes számra. Ismeretes, hogy sin $l\beta$ megadható $\sin\beta$ és $\cos\beta$ polinomjaként. Nevezetesen

$$\sin l\beta = \sin\beta(2^{l-1}\cos^{l-1}\beta + a_1\cos^{l-3}\beta + a_2\cos^{l-5}\beta + a_3\cos^{l-7}\beta + \ldots), \tag{1}$$

ahol a_1, a_2, $\ldots$ egész számok.[1] Ha tehát $\sin\beta$ és $\cos\beta$ racionális, akkor $\sin l\beta$ is racionális minden $l = 1, 2, \ldots$ számra.

Tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, melynek egyik hegyesszöge β. Ha a háromszög oldalai a, b és c egészek, akkor mind $\sin\beta$ mind $\cos\beta$ racionális. Tegyük fel, hogy a és c relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1. Ekkor $\cos\beta = a/c$ és legyen c a 2-től különböző. (Ilyen háromszög van, pl. $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.)

[1]Lásd pl. 1575. feladat, K. M. L. 37 (1968) 120. o.

Megmutatjuk, hogy a fenti feltételeket kielégítő β-kra $\sin l\beta \neq 0$, minden l-re. (Ebből következik, hogy $\sin l\alpha = 0$ sem következik be semmilyen l-re.)

(1)-ből átrendezéssel és c^{l-1}-nel való beszorzással adódik

$$\frac{\sin l\beta}{\sin \beta} \cdot c^{l-1} - c^{l-1} \cdot 2^{l-1} \cos^{l-1} \beta = a_1 c^{l-1} \cos^{l-3} \beta + a_2 c^{l-1} \cos^{l-5}\beta + \dots$$

Ha $\sin l\beta = 0$ lenne valamely l-re, akkor a bal oldal értéke

$$c^{l-1} \cdot 2^{l-1} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{l-1} = (2a)^{l-1}$$

lenne, míg a jobb oldalon egy, a c^{l-1}-nel osztható szám állna, hiszen

$$a_k c^{l-1} \cos^{l-2k-1} \beta = a_k c^{l-1} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{l-2k-1} = a_k a^{l-2k-1} c^{2k}.$$

Mivel a és c relatív prímek, ez ellentmondás. Tehát $\sin l\beta$ semmilyen l-re nem nulla, amint állítottuk.

Ferró József, Papp Zoltán