A bizonyítás alapötlete a következő. Az $f(uv)$ kifejezést megpróbáljuk úgy átalakítani, hogy olyan típusú kifejezéseket kapjunk, amelyek határértéke $f(u)$, ill. $f(v)$. Ehhez új tagokat „csempészünk be” $f(uv)$-be a következőképpen:

$$f(uv)=\lim_{x\to 0}\frac{(uv)^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u^xv^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u^xv^x-u^x+u^x-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{u^x\bigl(v^x-1\bigr)}{x}+\frac{u^x-1}{x}\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{u^x-1+1}{x}\cdot x\right)\cdot\frac{v^x-1}{x}+\frac{u^x-1}{x}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{u^x-1}{x}\cdot x+1\right)\cdot\frac{v^x-1}{x}+\frac{u^x-1}{x}\right\}.$$

Legyen most x olyan, a 0-hoz tartó sorozat, melynek végtelen sok tagja különböző 0-tól. Felhasználva a határértékekre vonatkozó elemi azonosságokat, adódik, hogy

$$f(uv)=\{f(u)\cdot(\lim_{x\to 0})+1\}\cdot f(v)+f(u)=f(v)+f(u),$$

hiszen $f(u)\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$, mivel $f(u)$ véges és $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, és így a feladat feltétele szerint $f(uv)$ is létezik és véges.

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás nem a lehető legegyszerűbb. Az egyszerűbb megoldásokkal szemben viszont előnye, hogy kevés más ismeretet tételez fel.

Ha például felhasználjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}u^x=1$, akkor bizonyításunk jóval egyszerűbbé válik:

$$f(uv)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{u^x\bigl(v^x-1\bigr)}{x}+\frac{u^x-1}{x}\right\}=$$

$$=\bigl(\lim_{x\to 0}u^x\bigr)\cdot f(v)+f(u)=f(u)+f(v).$$

2. Könnyű észrevenni, hogy

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{a^x-a^0}{x-0},$$

s a jobb oldal éppen az a^x függvény különbségi hányadosa az $x=0$ helyen. Vagyis

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^0}{x-0},$$

ami a feladat szerint létezik, éppen az a^x függvény differenciálhányadosa a 0 helyen. És mivel a^x differenciálhányadosa $a^x\cdot\ln a$, ennek értéke az $x=0$ helyen éppen $\ln a$. Ekkor a bizonyítandó állítás a jól ismert

$$\ln(uv)=\ln u+\ln v$$

azonosság. Ez az észrevétel már túlmegy a feladat megoldásához szükséges ismeretanyagon.

3. Kilenc dolgozat az ún. l’ Hospital-féle szabály felhasználásával vélte megoldani a feladatot. Ez egyrészt túlságosan „nagy ágyú”, másrészt alkalmazása körültekintést is igényel, és erről megfeledkeztek. A határérték tételek alkalmazása nem úgy megy, mint az egyszeregyé.