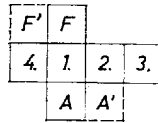


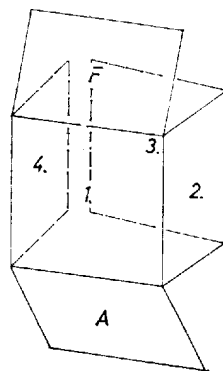
I. megoldás. A kockamodell minden egyes összefüggő kiterítése 6 egymáshoz csatlakozó négyzet, 5 él hajtogatható, a többi 7 van felvágva. A 3 élrány mindegyike képviselve van e vágásokban, mert ha pl. a 4 függőleges él egyike sem lenne felvágva, akkor a 7 vágott élből 4 esnék vagy az alaplap, vagy a fedőlap kerületére és azt a lapot elvágná a többiektől (másképpen pedig a 4 oldallal legfőljebb kétrétűen lenne lelapítható a síkba). Ez azt is jelenti, hogy minden lapnak legfőljebb 3 élet vághatjuk fel.

a) Ha van olyan élrány, amellyel párhuzamos 4 él közül csak 1-et vágunk fel, akkor tartjuk ezt függőlegesen. Minden ilyen kiterítésben a 4 oldallal egymás után csatlakozik egy 4×1 -es téglalappá, a további 6 vágásból 3–3 az alap-, illetve a fedőlapot teszi hajtogathatóvá, ezek a téglalap egyik egyik hosszabb oldalán csatlakoznak a palást-téglalaphoz. Megjegyezzük csupán, hogy erre a lényegesen különböző – azaz tükrözéssel, forgatással egymásba át nem vihető – lehetőségek száma 6: ha az F fedőlap az 1. ábra F' helyzetében van, akkor az A alaplap az alsó élen 4-féleképpen csatlakozhat, az F helyzetben pedig 2 módon: A -ban és A' -ben; a lehetőségek száma egyébként nem lényeges az állítás szempontjából.



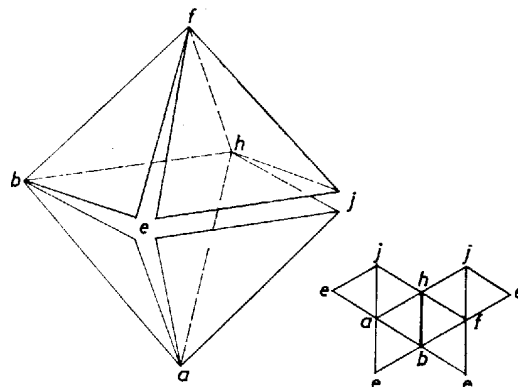
1. ábra

Az ilyen esetekben az oktaédernek 4 éle vízszintes, közülük az előírás szerint 3-at vágunk fel; a modellje már evvel szétnyílik két négy oldalú gúla palásttá (2. ábra).



2. ábra

E két paláston viszont csak 1–1 oldalélt vágunk fel, így a két gúlapalást 4–4 háromszöglapja külön-külön összefüggő marad és kiteríthető, továbbá e két palást egymással is összefügg a nem vágott vízszintes él mentén és kiteríthető. Az 1. ábrabeli kiterítés megfelelője a 2a. ábrán látható.

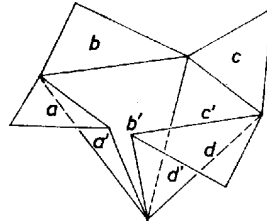


2a. ábra

Az ide tartozó esetekben tehát igazoltuk a feladat állítását.

b) A kockamodell hátralevő felvágási lehetőségeiben mindhárom élránnyal párhuzamosan legalább 2 élt vágunk fel. A 7 vágás egyetlen lehetséges ilyen eloszlása $3+2+2$. Vágunk fel a függőleges élekből 3-at, vagyis csak 2 oldallapot hagyunk egymással közvetlen kapcsolatban – ezeket tekintjük a kiterítés magjának –, ezekhez közvetlenül csak A és F csatlakozhat, és legalább az egyik csatlakozik is, a további 2 oldallap pedig A és F valamelyikén át csatlakozik.

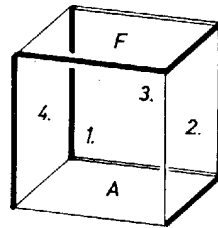
Legyen mindvégig a kocka (hajtogatva) együtt maradó két oldallapja az 1. ábra 1-es és 2-es lapja – mondjuk így is: elülső és jobb oldali lapja. Az oktaédermodell innen adódó felvágásai céljára leírjuk egy az a) részben már látott felvágását. Fordítsuk úgy a 2. ábra modelljét, hogy elülső csúcsa fölültre és jobb oldali csúcsa előre jusson (3. ábra), így a felső gúla a, b, c, d lapjai virágsziromszerűen szétnyílnak és mind a 4 vízszintes él hajtogatott.



3. ábra

Ebből származtatjuk a hátralevő kockafelvágásoknak megfelelő oktaéderfelvágásokat úgy, hogy bizonyos lapokat levágunk és valamelyik szomszédjukra átragasztjuk őket. Az 1-es, 2-es hajtogatás miatt d mindenesetre levágandó lesz d' -ről, a többi 3 alsó–felső lappár viszont mindig együtt marad, a az a' -vel, b a b' -vel, c a c' -vel.

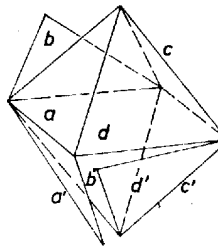
b 1. Tekintsük először a kockának azokat a felvágásait, amelyekben az 1, 2 maghoz A és F közül csak az egyik csatlakozik. Az 1, 2 mag szimmetrikus egyrészt a vízszintes felező síkra, másrészt a közös élükön átmenő átlós síkra, ezért elég azt vennünk, ha a maghoz csatlakozó lap A , és ha ez az 1-es alá csatlakozik. Ezzel (a 3 oldalélen túl) további 3 élt vágunk fel: 2 fedőélt, valamint a 2-es és A lapok közti élt (a 4. ábrán az eddigi 6 vágott él vastagítva van), közülük 2 előlről hátra fut, ezért a 4-es (bal oldal-) lap ezekkel párhuzamos élei már nem vágathók, tehát a 4-eshez két párhuzamos oldalán csatlakozik A és F .



4. ábra

A hetediknek felvágandó él a 3-as (hátsó) lapot választja majd el vagy A -tól, vagy F -től (az ábra kettős vonalú élei), tehát a befejezésre itt 2 lehetőség van.

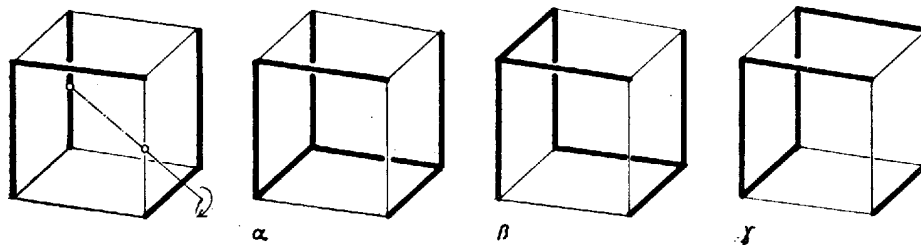
Felsoroljuk a 3. ábra virágján végzendő változtatásokat. A két felvágott fedőél miatt a d' -ről levágott d mindjárt hozzáragasztandó a -hoz, majd d -hez a c lap is (a jobb oldali oktaéderszűcs körüli 4 lap így d, c, c', d' sorrendben összefüggő és kiteríthető), továbbá az $A - 4 - F$ összefüggés miatt a' és b' közé vágás jön, de kapcsolatuk megmarad az a', a, d, c, c', b' lapsorozaton át (5. ábra).



5. ábra

Nincs szükség más változtatásra, ha a 3-as lap az F -en át csatlakozik a maghoz; ha viszont ezt elvágjuk, emiatt b és c összeragasztandók, de ekkor a 3-as és A közti csatlakozás miatt a b' és c' közös élét kell vágunk, megmarad a hátsó csúcs kiteríthetősége és összefüggősége.

b 2. Ha végül az 1, 2 maghoz A -t F -et is hajtogatással csatlakoztatjuk, mégpedig A -t ismét az 1-es laphoz, akkor F -et csak a 2-eshez lehet, különben az oldalkapcsolataitól elvágott 3-assal a $3 - F - 1 - A$ lapnégyes jönne létre, amit már láttunk az a) esetekben. Ezzel elvágtuk A -t a 2-estől és F -et az 1-estől (6. ábra bal oldali része), és a hátralevő 2 vágás egyike a 3-ast, másika a 4-est vágja majd el A -tól vagy F -től.



6. ábra

Látható, hogy az eddig felvágott 5 él együttese önmagába megy át a kockának azzal a 180° -os elfordításával, mely az 1-es és 2-es lapot egymással fölcseréli, ezért a hátralevő 2 vágási él gondolható $2 \cdot 2 = 4$ megválasztási lehetősége közül kettő lényegében azonos. Elég tehát bizonyítanunk a feladat állítását a következő 3 esetben (6. ábra azonos jelű részei):

α) a 3-as lap is, a 4-es is F -en át csatlakozik a maghoz;

β) a 3-as az F -hez, a 4-es az A -hoz csatlakozik;

γ) a 4-es az F -hez, a 3-as az A -hoz csatlakozik.

Az oktaéder megfelelő felvágásai a szíromalakzat következő származékai lesznek: d -t mindhárom esetben levágjuk d' -ről és átragasztjuk a -hoz, az α) esetben nincs is más alakítani való,

a β) esetben elvágjuk b' -t a' -től, viszont hozzáragasztjuk b -t a -hoz;

a γ) esetben elvágjuk b' -t c' -től, viszont hozzáragasztjuk b -t c -hez.

A b 1. esetben leírtakhoz hasonlóan az oktaédermodell mindig kiteríthető és összefüggő marad.

Sorra vettük a kocka felvágásának minden lehetőségét, mindegyikben igaznak találtuk a feladat állítását; a bizonyítást tehát befejeztük. – Azt is kaptuk, hogy a kocka lényegesen különböző hálózatainak száma $6 + 2 + 3 = 11$.

II. megoldás. 1. Először a fölívágott modellnek a föltevésből következő tulajdonságait állapítjuk meg. A modell 12 éléből 7-et fölívágva, 5 éle hajtogathatóan marad. A hálózatnak a síkra kiterített állapotában mindegyik ilyen él két oldalán álló lap középpontjait összekötve, egy 5 élű, 6 csúcsú H_I gráfot kapunk, csúcsai a 6 kockalap középpontjai. (A H betűvel a *hatlapú* szabályos testre kívánunk utalni.) A hálózat összefüggősége azt jelenti, hogy bármelyik lapközéppontból bármelyik másikba át lehet menni H_I éllei mentén. Ezért H_I -et a kocka *lapközéppont-összefüggési gráfjának* nevezzük.

A hálózatnak mint sokszögnek a határvonalait tekintve, a 6 lap együttes kerülete 24 egységnyi (kockaélnyi). Ebből az 5 hajtogatott él $5 \cdot 2 = 10$ egységnyit vesz föl belső osztóvonalakra, a maradó 14 egységnyi pedig a 7 vágott élből ered, mindegyik 2 helyen jelenik meg, ezek határolják a hálózatot. Belső határvonal nem lehet a sokszögben, mert ha volna benne a hálózathoz nem tartozó rész: „lyuk”, ennek szögei derékszögek lennének, oldalai egységnyiek vagy ennek többszörösei, területe egy vagy több kockalapnyi, márpedig egyetlen négyzet körülzárásához is 8 vele egybevágó négyzet szükséges, több, mint ahány lapja a kockának van. Így – az összefüggőség alapján egyetlen határvonal van, ezen bármely pontjából indulva és visszafordulás nélkül haladva, 14 egységnyi út után visszaérünk a kiindulópontba.

Másrészt a hálózat síkba kiteríthető volta alapján minden egyes kockacsúcsba befutó 3 él közül legalább 1 fel van vágva, különben nem szűnnék meg a csúcsba befutó 3 lap egymáshoz képest merevített, térbeli helyzete.

Egybevetve az utóbbiakat, kapjuk, hogy a hálózat kerületét egységszakaszokra bontó 14 pont közt a kockának mind a 8 csúcsa legalább 1-szer előfordul, tehát bármelyik kockacsúcsból bármelyik másikba eljuthatunk felvágott élek mentén haladva. És ez természetesen akkor is érvényes, ha a hálózatot visszahajtogatjuk kockává, vagy még fel sem vágtuk, csak alkalmasan kijelöltük a felvágandó éleket. Eszerint, a modell felületén a 8 csúcsot és a felvágásra kijelölt 7 élt egy H_{II} gráf szögpontjainak, illetőleg éleinek tekintve, ezt joggal nevezhetjük a *kocka felvágási gráfjának* is és a *kockacsúcsok* bejárási, *összefüggési gráfjának* is.

A továbbiakban H_I -et is a hálózatból visszaállított kockamoddellen tekintjük.

2. A kívánt bizonyítás más oldalról való előkészítésül bizonyítás nélkül kimondjuk a kockánk és oktaédereink kölcsönös helyzetéből adódó alábbi kapcsolatokat; bizonyításuk átgondolását az olvasóra hagyjuk.

Kockánk O középpontja egyszersmind oktaéderünknek is középpontja.

Bármely az O -ból induló félegyenes mindkét poliéder határfelületét egy-egy pontban metszi; más szóval: e két pont egymás vetülete a másik poliéderen, O -ból való centrális vetítés mellett.

Amint a kocka lapközéppontjainak az oktaéderen levő vetületei az utóbbinak a csúcsai (hiszen rendre azonosak), hasonlóan az oktaéder lapközéppontjainak a kockán levő vetületei a kocka csúcsai.

Az oktaéder egy élének a kockán levő vetülete olyan két egyenesszakaszból álló törött vonal, mely a kocka két szomszédos lapjának középpontját köti össze, a köztük levő él felezőpontjában megtörve.

A kocka egy élének az oktaéderen levő vetülete olyan két egyenesszakaszból álló törött vonal, mely az oktaéder két szomszédos lapjának középpontját köti össze, a köztük levő él felezőpontjában megtörve.

3. Tekintsük mármost az oktaédermodell 6 csúcsát, valamint az előírás szerint felvágandó 5 élt egy N_I gráf szögpontjainak, illetve éleinek (az N betűvel a *nyolclapú* szabályos testre utalunk) és nevezzük az *oktaéder felvágási gráfjának*.

Az előírás szerint N_1 és a kockalapközéppontok H_1 összefüggési gráfja egymás vetületei. Mivel H_1 szögpontjai közt szerepel a kocka összes lapközéppontja, azért N_1 szögpontjai közt szerepel az oktaéder összes csúcsa. Eszerint az oktaédermodell mindegyik csúcsába befutó élek közül legalább 1 fel van vágva, vagyis mindegyik csúcsába befutó 4 lap – ha a többi 4 laptól eltekintünk – síkba kiteríthető.

Ahhoz, hogy a 8 oktaéderlap együttese is kiteríthető, még egy megállapítást teszünk. Az N_1 gráf 5 élét egyenként tekintve, 10 végződésük eloszlik az oktaéder 6 csúcsára és mindegyikbe legalább 1 végződés fut be. Ezért 1-nél több befutás legföljebb $10 - 6 = 4$ csúcsban lehet, és továbbmenve legalább $6 - 4 = 2$ csúcsba csak 1 végződés fut be (mint egy zsákutca). Kezdjük az oktaéderlapok kiterítését az N_1 -nek egyik ilyen végpontja, a C_1 körüli 4 lappal. Már csak arra hivatkozunk, hogy H_1 összefüggő volta alapján N_1 is összefüggő (a vetítés megtartja az összefüggőséget), ennek alapján C_1 környezetete után kiteríthető az N_1 -beli C_2 szomszédjának környezetete és így tovább, az oktaéder mindegyik csúcsának környezetete, vagyis a felvágott modell egésze.

Meg kell azonban mutatnunk, hogy az ilyen kiterítés összefüggő, hiszen N_1 -en haladva a fentiek szerint eljutunk 1-nél több élű szögpontjába, ekkor a megfelelő csúcsba befutó élek közül legalább 2 van felvágva, és ezért a csúcs körüli 4 lap közt van olyan kettő, amelyek csak a további 4 lapon át fűgnek össze egymással. Tekintsük evégett a fenti H_{II} (kockacsúcs-összefüggési) gráfnak az oktaéderen levő vetületét is egy N_{II} gráfnak. Ennek szögpontjai tehát a 8 lapközéppont és mindegyik éle olyan két szomszédos lap középpontját köti össze (közös élük felezőpontján át), amelyek közti oktaéderél nincs felvágva, hiszen a neki megfelelő kockaél – mint H_{II} -nek éle – fel van vágva. És mivel H_{II} összefüggő, azért N_{II} is, és N_{II} mentén az oktaédermodell kiterítettje is összefüggő. A probléma állítását ezzel bebizonyítottuk.

Összeállítva *Göndöcs Ferenc*, *Komjáth Péter* és *Szabó György* dolgozataiból.

Megjegyzések. 1. Tulajdonképpen azt is bebizonyítottuk a fentiekkel, hogy fordítva, minden kiteríthető és összefüggő oktaéderhálózathoz is tartozik egy kiteríthető és összefüggő kockahálózat. Így – az I. megoldást is figyelembe véve – a különböző kockahálózatok és különböző oktaéder hálózatok száma egyaránt 11.

2. Felhasználható a bizonyítás befejezésében az is, hogy gráfjainkban nincs ún. *körút*, vagyis olyan részük, amelyen egy szögpontból egy másikba olyan két úton lehetne eljutni, melyek egyetlen élt sem tartalmaznak közösen. H_{II} -re ez így adódik: ha volna benne körút, ez elválná egymástól a kocka felületének azt a két részét, amely jobb és bal kezünk felől esnék, míg a körutat egyszer körüljárjuk, így pedig a kiterítés nem lenne összefüggő. N_1 pedig azért körútmentes, mert ha a fentiek szerinti „zsákutca”-éleit elhagyjuk, legföljebb 3 éle maradna körút céljára, ezek pedig elválnák az általuk határolt oktaéderlapot a többiektől.