I. megoldás. A harmonikus csoport definíciójában x_1 és x_2, továbbá x_3 és x_4 szerepe szimmetrikus, akár az egyik, akár a másik párt, akár mindkettőt fölcserélve a bal oldal változatlan marad. Más indexcserék esetén viszont a kifejezés értéke megváltozik.

I. Bontsuk föl az egyenlet bal oldalát két másodfokú polinom szorzatára, melyeknek zérushelyei x_1 és x_2, illetve x_3 és x_4:

$$x^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=(x^2-px+q)(x^2-p'x+q'), \tag{2}$$

ahol tehát

$$\begin{cases} x_1+x_2=p, & x_3+x_4=p', \\ x_1x_2=q, & x_3x_4=q'. \end{cases} \tag{3}$$

Föltettük, hogy $a=1$, ami csak azt jelenti, hogy b/a, c/a, d/a, e/a helyett rendre (új) b, c, d, e betűt írtunk; ezáltal sem a gyökök nem változtak meg, sem a determináns 0 vagy nem 0 volta, mert az új determináns értéke az eredetiének $1/a^3$ része (mind a három sorból kiemelünk $1/a$-t).

Az együtthatók összehasonlításából

$$p+p'=-4b, \tag{4}$$
$$q+q'+pp'=6c, \tag{5}$$
$$pq'+p'q=-4d, \tag{6}$$
$$qq'=e. \tag{7}$$

Ennek a rendszernek 3 megoldása van, hiszen pl. az α, β, γ, δ számok 3-féleképpen rendezhetők két párba, α párjának egymás után β-t, γ-t, végül δ-t véve. Azáltal azonban, hogy x_1, x_2, x_3, x_4-et harmonikus csoportnak tesszük fel – ami már nem engedi meg a négy gyök tetszés szerinti indexelését –, a megoldást egyértelművé tesszük. A definíció szerinti kapcsolatból átrendezéssel, majd (3) felhasználásával

$$2(x_1x_2+x_3x_4)-(x_1+x_2)(x_3+x_4)=0, \qquad 2(q+q')-pp'=0. \tag{8}$$

Ennek alapján (5) helyére két egyenletet írhatunk, vagy csak p vagy csak q betűkkel:

$$pp'=4c, \tag{5'}$$
$$q+q'=2c. \tag{5''}$$

Mármost p és p' a (4) és (5′) alapján, q és q' pedig (5″) és (7) alapján rendre a következő két egyenlet gyökei:

$$p^2+4bp+4c=0, \qquad q^2-2cq+e=0,$$

vagyis

$$p=-2\left(b+\varepsilon\sqrt{b^2-c}\right), \qquad p'=-2\left(b-\varepsilon\sqrt{b^2-c}\right),$$
$$q=c+\delta\sqrt{c^2-e}, \qquad q'=c-\delta\sqrt{c^2-e},$$

ahol ε és δ értéke egymástól függetlenül $+1$ vagy -1.

Ezeket a még hátra levő (6)-ba helyettesítve, majd kifejtve, rendezve

$$\left(b+\varepsilon\sqrt{b^2-c}\right)\left(c-\delta\sqrt{c^2-e}\right)+\left(b-\varepsilon\sqrt{b^2-c}\right)\left(c+\delta\sqrt{c^2-e}\right)=2d,$$
$$-\varepsilon\delta\sqrt{b^2-c}\cdot\sqrt{c^2-e}=d-bc, \tag{9}$$

végül négyzetre emeléssel, rendezéssel

$$(b^2-c)(c^2-e)=(d-bc)^2, \tag{9'}$$
$$ce+2bcd-c^3-d^2-b^2e=0, \tag{10}$$

ez szükséges föltétele annak, hogy teljesüljön (2), (3) és (8), más szóval, hogy x_1, x_2, x_3, x_4 az (1) gyökei legyenek és ebben a sorrendben harmonikus csoportot alkossanak.

És mivel a föltételbeli determinánst kifejtve éppen (10) bal oldalát kapjuk ($a=1$), azért a determináns eltűnése valóban szükséges föltétel.

II. Tegyük fel – megfordítva –, hogy a determináns értéke 0. Ez – mint láttuk ekvivalens (9′) teljesülésével, s mivel itt a jobb oldal nem negatív, azért a bal oldali tényezők egyező előjelűek. Így a (9)-beli két négyzetgyök egyformán vagy valós, vagy tiszta képzetes, tehát ε, δ megválaszthatók úgy, hogy (9) két oldala előjelben is egyezzék. Legyen $\sqrt{b^2-c}$ egyik, rögzített értéke P, és $\sqrt{c^2-e}$-nek az az értéke Q, amelyre $PQ=d-bc$. Ekkor a

$$p=-2(b+P), \quad p'=-2(b-P), \quad q=c+Q, \quad q'=c-Q$$

kifejezésekre (6) ekvivalens (9)-cel, és mint a behelyettesítés mutatja, (4), (5), (7) és (8) mindegyike teljesül. Ha tehát x_1, és x_2, ill. x_3 és x_4 rendre a (2) jobb oldala első, ill. második tényezőjének 0 helyeit jelölik, ezek (8) teljesülése alapján harmonikus csoportot alkotnak. Ezzel bebizonyítottuk a kitűzésbeli föltétel elegendő voltát.

Komjáth Péter, Papp Zoltán

II. megoldás. Jelöljük az $(x_1-x_3)(x_2-x_4)+(x_1-x_4)(x_2-x_3)$ kifejezés értékét K-val, a feladatban szereplő determinánst Δ-val, értékét pedig D-vel. Azt kell megmutatnunk, hogy K és D értéke egyszerre 0 vagy egyszerre nem 0, ha x_1, x_2, x_3, x_4 a Δ-ban szereplő együtthatókkal felírt egyenlet gyökei.

Ha a gyökökből levonunk egy t számot, vagyis őket az

$$x_1'=x_1-t, \quad x_2'=x_2-t, \quad x_3'=x_3-t, \quad x_4'=x_4-t \tag{11}$$

számokkal helyettesítjük, akkor K értéke nyilván változatlan marad. Vizsgáljuk meg, hogyan változik meg D értéke a (11) transzformáció hatására. A (11) alatti gyökök az

$$a(x-t)^4+4b(x-t)^3+6c(x-t)^2+4d(x-t)+e=0$$

egyenlet gyökei, a (11) transzformáció tehát az együtthatókra az

$$\begin{aligned} a'&=a,\\ b'&=-at+b,\\ c'&=at^2-2bt+c,\\ d'&=-at^3+3bt^2-3ct+d,\\ e'&=at^4-4bt^3+6ct^2-4dt+e \end{aligned} \tag{12}$$

transzformációt jelenti. Az új együtthatókkal felírt Δ' determináns értéke megegyezik az eredeti determináns értékével, hiszen ha Δ első oszlopának t-szeresét levonjuk a második oszlopból, majd az új második oszlop $(-2t)$-szeresét, és az első oszlop $(-t^2)$-szeresét hozzáadjuk a harmadik oszlophoz, akkor az

$$\begin{vmatrix} a & b-at & c-2bt+at^2 \\ b & c-bt & d-2ct+bt^2 \\ c & d-ct & e-2dt+ct^2 \end{vmatrix}$$

determinánst kapjuk. Ennek első sorának t-szeresét levonva a 2. sorból, majd az új második sor $(-2t)$-szeresét és az első sor $(-t^2)$-szeresét a harmadik sorhoz hozzáadva Δ'-t kapjuk.

Válasszuk t-nek x_4-et, ekkor x_4' értéke 0 lesz, elegendő tehát azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $x_4=0$, hiszen ha ez nem volna így, a fenti transzformációval olyan egyenletet kapunk, melyben az egyik gyök 0, és K, D értéke e transzformáció alatt változatlan marad. Ekkor

$$K=(x_1-x_3)x_2+x_1(x_2-x_3)=2x_1x_2-x_3(x_1+x_2),$$

és $e=0$ miatt

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & 0 \end{vmatrix}=2bdc-c^3-ad^2$$

Az x_1, x_2, x_3 számok az

$$ax^3+4bx^2+6cx+4d=0 \tag{13}$$

harmadfokú egyenlet gyökei. Ha van a gyökök között 0-val egyenlő, akkor $d=0$, és $D=0$ csak akkor lehet, ha még $c=0$ is teljesül. Ekkor tehát van (13)-nak még egy, 0-val egyenlő gyöke. Megmutatjuk, hogy ekkor $K=0$. Valóban, ha $x_1=x_2=0$, vagy $x_1=x_3=0$, vagy $x_2=x_3=0$, akkor K értéke mindig 0.

Megfordítva, ha van a gyökök között 0, akkor $K=0$ csak úgy lehet, ha $c=0$, hiszen a gyökök és együtthatók összefüggése alapján

$$\frac{6c}{a}=x_1x_2+x_3(x_1+x_2)=3x_1x_2-K.$$

Ha $x_3=0$, akkor $K=0$ miatt x_1x_2-0, és $c=0$, ha pedig x_1 vagy x_2 értéke 0, akkor nyilván $c=0$.

Ezzel beláttuk, hogy ha van a gyökök között 0, akkor K és D értéke egyszerre 0. Ha nincs a gyökök között 0, akkor K értéke akkor és csakis akkor 0, ha

$$x_3=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2},$$

vagyis ha x_3 az x_1 és x_2 harmonikus közepe. Az 1701. feladatban[1] beláttuk, hogy ez akkor és csakis akkor 0, ha $D=0$,

[1]Lásd K. M. L. 41 (1970) 205. o.

feladatunk megoldását befejeztük.